Clap-Clap : Formes modulaires, aspects théoriques et calculatoires
Rennes, lundi 6 février 2017 9h
Damien Robert

Fonctions theta algébriques I

I Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$

$A = \boxed{V}/\Lambda$ $\quad V$ $\mathbb{C}$ ev dim g, Λ réseau

Si A ppl^t polarisée : $\Lambda = \mathbb{Z}^g \oplus \boxed{\Omega}\mathbb{Z}^g$ $\quad \Omega \in \underbrace{\mathcal{H}_g}_{\text{espace de Siegel}}$ (Ω sym, $\overbrace{\operatorname{Im}\Omega}^{\text{partie imaginaire}}$ déf. pos)

Polarisation $\operatorname{Im}\Omega^{-1}$

$$a, b \in \mathbb{Q}^g \quad \boxed{\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{\left(\pi i\, {}^t(a+n)\Omega(a+n) + 2\pi i\, {}^t(b+n)(z+b)\right)}$$

1 Morphismes projectifs

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{P}^N, \quad z \longmapsto [f_0(z) : \dots : f_N(z)]$$

$$A = \mathbb{C}^g/\Lambda \qquad f_i(z+h) = f_i(z) \underbrace{\overset{\text{facteur d'automorphie}}{a(z+h)}}_{\text{indépendant de } i \Rightarrow \text{bien défini}}$$

$$f_i(z+h_1+h_2) = a(z, h_1+h_2) f_i(z) = a(z_1+h_1, h_2) f_i(z+h_1)$$
$$= a(z+h_1, h_2) a(z, h_1) f_i(z)$$

$$\boxed{a(z, h_1+h_2) = a(z, h_1)\, a(z+h_1, h_2)} \quad \text{condition de cocycle}$$

Fibré en droites :

$$\begin{tikzcd} V \times \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & (V\times\mathbb{C})/\Lambda \arrow[d] \\ V \arrow[r] & A = V/\Lambda \arrow[u, bend right, "\text{section}"'] \end{tikzcd}$$

$= \mathcal{L}$ fibré en droites

où $h \in V \times \mathbb{C}$ via $h.(v, \alpha) = (v+h, a(v,h)\alpha)$

Λ agit proprement et librement sur $V \times \mathbb{C}$
pour un petit ouvert U, $(U \times \mathbb{C})/\Lambda \simeq (U/_{\Lambda \cap U}) \times \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ sections locales existent toujours, pas toujours globalement

Thm (Apell - Humbert)

la classe d'isomorphisme de $\mathcal{L}$ ne dépend que de a modulo un cobord.

- Il existe H forme hermitienne, E = Im H forme symplectique associée, telle que $E(\Lambda,\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$.
- Il existe χ semi-caractère pour H
  i.e. $\chi(h_1+h_2) = \chi(h_1)\chi(h_2)e^{i\pi E(h_1,h_2)}$
  tel que $a(z,h) = \chi(h)e^{\pi H(z,h) + \frac{\pi}{2}H(h,h)}$

$\mathbb{C}_1^\times = \{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$

Corollaire

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \underset{\mathrm{Hom}(\Lambda,\mathbb{C}_1^\times)}{\{\chi\}} & \to & \{(H,\chi)\} & \to & \{H / \mathrm{Im}\,H(\Lambda,\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\} & \to 0 \\
& & & \downarrow\wr & \underset{\text{polarisation}}{\mapsto \boxed{H}} & \downarrow\wr & \\
0 \to & \mathrm{Pic}^0 A & \to & \mathrm{Pic}\,A = \{\text{fibrés en droite}\} & \to & NS(A) & \text{Néron Severi} \\
& & & \mathcal{L} & \mapsto & c_1(\mathcal{L}) & \text{classe de Chern}
\end{array}$$

Plongements projectifs

$\mathcal{L}$ est dit très ample si $\varphi : z \mapsto (f_0(z),\dots,f_N(z))$ est un plongement (assez de sections globales)

$\mathcal{L}$ ______ ample si $\exists n\in\mathbb{N}^*$ $\mathcal{L}^n$ est très ample.

Thm: $\mathcal{L}$ est ample $\Leftrightarrow$ H est défini positif
indep du semi caractère.

$\mathcal{L} \leftrightarrow (H,\chi)$

$\mathcal{L}\otimes\dots\otimes\mathcal{L} = \mathcal{L}^n \leftrightarrow (nH, \chi^n)$

2 Isogénies

$A_1 = V_1/\Lambda_1$ $A_2 = V_2/\Lambda_2$ $\dim V_1 = \dim V_2 = g$

Isogénie = morphisme surjectif $f : A_1 \to A_2$

Il existe alors F relèvement analytique $V_1 \to V_2$

F est linéaire
$F(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$

$\mathrm{Ker}\,F \simeq F^{-1}(\Lambda_2)/\Lambda_1$

2a Isogénie duale

$f: A_1 \to A_2$

$\underset{\text{fibrés en droite alg}^t\text{ équiv à 0}}{\mathrm{Pic}^0 A} \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}_1^*)$ $\qquad A = V/\Lambda$

$\simeq \underset{\text{semi linéaire}}{\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V,\mathbb{C})} / \overline{\Lambda}$

$\phi : \ell \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V,\mathbb{C}) = \overline{V}$

$\downarrow$

$e^{2i\pi\,\mathrm{Im}\,\ell}$

$\overline{\Lambda} = \mathrm{Ker}\,\phi = \{\ell \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V,\mathbb{C}) / \mathrm{Im}\,\ell \subseteq \mathbb{Z}\}$

$\hat{c} : V\times\overline{V} \to \mathbb{C}$
$(v,\ell) \mapsto \mathrm{Im}\,\ell(v)$
est non dégénérée,
$\overline{\Lambda}$ est un réseau ds $\overline{V}$

dc $\mathrm{Pic}^0(A) \simeq \overline{V}/\overline{\Lambda}$ est une variété abélienne
$= \hat{A}$ variété duale.

$\hat{f} : \hat{A}_2 \to \hat{A}_1$
$\mathcal{L} \mapsto f^*\mathcal{L}$
$\ell \mapsto \ell\circ F$

Prop: $\hat{f}$ est une isogénie
$\mathrm{Ker}\,\hat{f} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\,f, \mathbb{C}^*)$

3 Polarisation

$\Lambda^\perp = \{v\in V / E(v,\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}$

$(A,\mathcal{L})$ $\qquad \phi_{\mathcal{L}} : A \to \hat{A}$
$x \mapsto \underset{\text{translaté par }x\text{ (isogénie)}}{t_x^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1}}$

ne dépend que de H
$= \Lambda^\perp/\Lambda$
$K(\mathcal{L}) := \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathcal{L}}$
s/s-gpe fini

représentation analytique $v \mapsto H(v,\cdot)$ rq : c'est bien morphisme de groupes.

Corollaire: $\phi_{\mathcal{L}}$ isogénie $\Leftrightarrow$ H non dégénérée
Dans ce cas $\mathcal{L} \simeq_{\mathrm{alg}} \mathcal{L}' \Leftrightarrow \exists x, \mathcal{L}' = t_x^*\mathcal{L}$

Ex: On se fixe (1) H déf. pos.

(2) décomposition $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ avec Λ_1, Λ_2 isotrope pour E.

On peut définir semi-caractère canonique χ_0 tel que

$$\chi_0|_{\Lambda_1} = 1 \qquad \chi_0(h) = e^{i\pi E(h_1,h_2)} \quad \text{si } h = h_1 + h_2$$
$$\chi_0|_{\Lambda_2} = 1$$

$\mathcal{L}_0$ est symétrique $\mathcal{L}_0^{-1} = \mathcal{L}_0$

4 Descente

$f: A_1 \to A_2$ $\mathcal{L}$ fibré en droites sur A_1, ample

$\exists ?\ \mathcal{M}$ fibré en droites sur A_2, $\mathcal{L} = f^*\mathcal{M}$

Thm : $\mathcal{M}$ existe $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f$ est isotrope pour $e = e^{2i\pi E}$

D) $\operatorname{Ker} f$ isotrope $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} E(F^{-1}\Lambda_2, F^{-1}\Lambda_2) \subseteq \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow F^{-1*} H \in NS(A_2)$

$\mathcal{M}_0$ sur $\mathcal{L}$ de polarisation $F^{-1*}H$

$f^*\mathcal{M}_0$ a pour polarisation $F^* F^{-1*} H = H$

$\mathcal{L} \simeq_{alg} f^*\mathcal{M}_0$ dc $\mathcal{L} \otimes f^*\mathcal{M}_0^{-1} \in \hat{A}_1$ $\qquad \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \otimes \mathcal{M}'$ convient.

$\mathcal{M}' \in \hat{A}_2 \xrightarrow{f^*} \hat{A}_1$

Corollaire : $K(\mathcal{L}) \supseteq A[n]$ ($\mathcal{L}$ toujours ample)
$\Leftrightarrow \exists \mathcal{L}_0 / \mathcal{L} = \mathcal{L}_0^n$

Rappel : $\mathcal{L}$ principal $\Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{L}}$ isom. $\Leftrightarrow \mathcal{L}$ de degré 1.

En général $\# K(\mathcal{L}) = (\deg \mathcal{L})^2$

5 Exemples

$\Lambda = \mathbb{Z}^g \oplus \Omega\mathbb{Z}^g$

$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_g)$ $\quad d_i | d_{i+1}$

$\Omega = \Omega_0 D$ avec $\Omega_0 \in \mathcal{H}_g$

Facteur d'automorphie : $f(z+m) = f(z)$

$$f(z+\Omega m) = e^{-\pi i\, {}^t m D\Omega m - 2\pi i\, {}^t z D m} f(z)$$

Prop : Une base de sections de $\mathcal{L}$ est donnée par, si $D = D_1 D_2$ (D_1, D_2 diagonale)

$$\left\{ \theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(D_1 z, \underbrace{D_1 \Omega D_2^{-1}}_{= D_1\Omega_0 D_1}) \ ,\ a \in D_1^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g,\ b \in D_2^{-1}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g \right\}$$

$d = d_1 \times \dots \times d_g$ dim de l'espace des sections $\qquad K(\mathcal{L}) \simeq \left(\underbrace{\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \dots}\right) \times \left(\ \hat{}\ \right)$

Ex 1 $\quad D = (4, \dots, 4) = 4$ $\qquad \Lambda = \mathbb{Z}^g \oplus \Omega\mathbb{Z}^g$

$D_1 = 2 \quad D_2 = 2$

$\left\{ \theta\begin{bmatrix} a/2 \\ b/2 \end{bmatrix}(2z, \Omega_0) \right\}_{a, b \in \mathbb{Z}^g}$ base des fct θ de niveau 4.

Ex 2 : $A = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g \oplus \Omega\mathbb{Z}^g)$

$\mathcal{L}_0 = (\operatorname{Im}\Omega)^{-1}$ polarisation principale

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^n \quad \left\{ \theta\begin{bmatrix} 0 \\ b/n \end{bmatrix}(z, \frac{\Omega}{n}) \quad b \in \mathbb{Z}^g \right\}$

$(A, \mathcal{L}_0^{\ell n}) \quad f: A \to B = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g \oplus \frac{\Omega}{\ell}\mathbb{Z}^g)$

$\operatorname{Ker} f = \Omega\left(\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}^g / \mathbb{Z}^g\right)$ isotrope pour forme hermitienne.

$\mathcal{L} \rightsquigarrow \ell n (\operatorname{Im}\Lambda)^{-1}$

$\mathcal{M} \rightsquigarrow n\left(\operatorname{Im}\frac{\Omega}{\ell}\right)^{-1} = \ell n (\operatorname{Im}\Lambda)^{-1}$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^n$ descend en $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0^n$

Sur $(A, \mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{\ell n})$ $\quad \theta\begin{bmatrix} 0 \\ b/\ell n \end{bmatrix}\left(z, \frac{\Omega}{\ell n}\right)$

Sur $(B, \mathcal{O}\!\ell = \mathcal{O}\!\ell_0^{\,n})$ $\quad \theta\begin{bmatrix} 0 \\ b/n \end{bmatrix}\left(z, \underbrace{\left(\frac{\Omega}{\ell}\right)/n}_{\overset{\shortparallel}{\lambda/\ell n}}\right)$

Illustration du thm de l'isogénie (vrai pr tte isogénie v. ab. pp^le polarisées)

II Fonctions théta algébriques

k alg^t clos

A v. ab. $/k$ $\quad (A, \mathcal{L})$ $\quad \mathcal{L}$ ample

$$\phi_{\mathcal{L}} : A \longrightarrow \hat{A}$$
$$x \longmapsto t_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

$K(\mathcal{L}) = \ker \phi_{\mathcal{L}}$ $\quad$ On suppose car $k \nmid \deg \phi_{\mathcal{L}}$

ie $\phi_{\mathcal{L}}$ séparable

$x \in K(\mathcal{L})$ $\quad t_x^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ $\quad \psi : \mathcal{L} \longrightarrow$

$G(\mathcal{L}) = \left\{ (x, \psi),\ \begin{matrix} x \in K(\mathcal{L}) \\ \psi : \mathcal{L} \to t_x^*\mathcal{L} \end{matrix} \right\}$ $\quad$ gpe non commutatif.

$(x, \psi_1) \cdot (y, \psi_2) = (x+y,\ t_x^*\psi_2 \circ \psi_1)$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\psi_1^*} t_x^*\mathcal{L} \xrightarrow{t_x^*\psi_2} t_{x+y}^*\mathcal{L}$$

$$0 \longrightarrow \underset{\text{centre}}{k^*} \longrightarrow G(\mathcal{L}) \xrightarrow{s} K(\mathcal{L}) \longrightarrow 0$$

$G(\mathcal{L})$ est une extension centrale, définie par un 2-cocycle. (non scindée)

On définit $e_{\mathcal{L}}$ sur $K(\mathcal{L})$ par : (appl° bilin.)

$$\boxed{\begin{matrix} e_{\mathcal{L}}(x,y) = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \\ \text{pour } g_1 \in s^{-1}(x),\ g_2 \in s^{-1}(y) \end{matrix}}$$

indép du choix de g_1 et g_2

$e_{\mathcal{L}} : K(\mathcal{L}) \times K(\mathcal{L}) \to k^*$

Prop : $e_{\mathcal{L}}$ est non dégénérée

$e_{\mathcal{L}} = e^{2\pi i E(\cdot, \cdot\cdot)}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "\psi_y"'] & t_x^*\mathcal{L} \arrow[d, "t_x^*\psi_y"] \\ t_y^*\mathcal{L} \arrow[r, "t_y^*\psi_x"'] & t_{x+y}^*\mathcal{L} \end{tikzcd}$$

ne commute pas !

commute au facteur $e_{\mathcal{L}}(x,y)$ près

Thm de descente : $\quad (A, \mathcal{L})$, $\quad f : A \longrightarrow B$

(1) $\mathcal{L}$ descend en $\mathcal{O}\!\ell$ sur B $\iff$ $\exists$ une section de $K = \ker f$ dans $G(\mathcal{L})$

$\iff K \subseteq K(\mathcal{L})$ isotrope pour $e_{\mathcal{L}}$

(2) $\exists$ une bijection entre de tels $\mathcal{O}\!\ell$ (à isom. près)

et les sections $K \longrightarrow \tilde{K} \subseteq G(\mathcal{L})$

(3) Dans ce cas, $G(\mathcal{O}\!\ell) \simeq \underset{\text{centralisateur de } \tilde{K} \text{ ds } G(\mathcal{L})}{Z(\tilde{K})} / \tilde{K}$, $K(\mathcal{O}\!\ell) \simeq K^{\perp}/K$

Se donner une section de K est aussi $\iff$ se donner un caractère sur $s^{-1}(K)$ trivial sur k^*

(semi-caractère sur groupes finis)

Clap Clap : Formes modulaires, aspects théoriques et calculatoires
Rennes, mardi 7 février 2017, 11h
Damien Robert

$\boxed{\text{Fonctions theta algébriques II}}$

Références : Birkenhake - Lange Complex abelian varieties

Mumford TATA On the equations defining abelian varieties

Previously (1) $A_{(A,\mathcal{L})} = V/\mathbb{C}$

$$\begin{array}{c} \mathcal{L} = V\times\mathbb{C}/\Lambda \\ \downarrow \\ A = V/\Lambda \end{array}$$

où $h(v,\alpha) = (v+h, \alpha \times a_{\mathcal{L}}(h,v))$

$a_{\mathcal{L}}(h,v) = \chi(h)e^{\pi H(v,h)+\frac{\pi}{2}H(h,h)}$

$E = \operatorname{Im} H \quad E(\Lambda,\Lambda)\subseteq\mathbb{Z}$.

(2) $E_{|\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0\end{pmatrix}$ où $D = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_g)$ $\quad d_1 | d_2 | \dots | d_g$

$\deg \phi = \prod d_i \qquad \phi_{\mathcal{L}} : A \to \hat{A}$

$K(\mathcal{L}) = \Lambda^{\perp}/\Lambda \simeq \mathbb{Z}^g/D\mathbb{Z}^g \oplus \widehat{\mathbb{Z}^g/D\mathbb{Z}^g}$

dual pour $e_{\mathcal{L}} = e^{2i\pi E}$ sur $K(\mathcal{L})$

(3) $\mathcal{G}(\mathcal{L})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{t_x} & A \end{array}$$

$x\in K(\mathcal{L})$

$\mathcal{G}(\mathcal{L})$ agit sur les sections $\Gamma(\mathcal{L})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\psi} & \\ s\uparrow & & \vdots\ \psi^{-1} \\ A & \xleftarrow[t_{-x}]{} & A \end{array}$$

$\tilde{\mathcal{L}} = V\times\mathbb{C}$

$$\phi : \begin{array}{ccc} V\times\mathbb{C} & \longrightarrow & V\times\mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow[t_\omega]{} & V \end{array}$$

$[\alpha,\omega].(v,t) = (v+\omega, \alpha t e^{H(v,\omega)})$

$\alpha\in\mathbb{C}^*$
$\omega\in V$

$[\alpha,\omega][\beta,\omega'] = [\alpha\beta e^{\pi H(\omega,\omega')}, \omega+\omega']$

loi de gpe.

$\tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\mathcal{L}}) = \{[\alpha,\omega]\}$

$\mathcal{L} = V\times\mathbb{C}/\Lambda$ dc $[\alpha,\omega]\in\tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\mathcal{L}})$ descend sur $\mathcal{G}(\mathcal{L})$

ssi il commute à l'action de Λ.

h agit sur $V\times\mathbb{C}$ par $[a_{\mathcal{L}}(h,0), h] = [\chi(h)e^{\frac{\pi}{2}H(h,h)}, h]$

Section de $s : \Lambda \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\mathcal{L}})$

$h \longmapsto [a_{\mathcal{L}}(h,0), h]$

$\mathcal{G}(\mathcal{L}) = \underbrace{Z}_{\text{centralisateur}}(s(\Lambda))/s(\Lambda) = \{[\alpha,\omega], \alpha\in\mathbb{C}^*, \omega\in\Lambda^{\perp}\}/s(\Lambda)$

car $H(\omega,h) = H(h,\omega) \Leftrightarrow E(\omega,h) = 0$.

II Cas algébrique $\quad k = \bar{k}$

$1 \to k^* \to \mathcal{G}(\mathcal{L}) \to K(\mathcal{L}) \to 0$

$e_{\mathcal{L}}$ non dégénérée sur $K(\mathcal{L})$ ~ fixe une décomposition en sous-groupes isotropes maximaux.

$K(\mathcal{L}) = K_1(\mathcal{L})\oplus K_2(\mathcal{L})$

Groupe d'Heisenberg $\quad H(\mathcal{L}) = k^*\times K_1(\mathcal{L})\times K_2(\mathcal{L})$

extension centrale définie par le cocycle

$(\alpha, x_1, x_2)(\beta, y_1, y_2) = (\alpha\beta e_{\mathcal{L}}(x_1,y_2), x_1+y_1, x_2+y_2)$

$\langle x,y\rangle = e_{\mathcal{L}}(x_1,y_2) = y_2(x_1)$

$e_{\mathcal{L}}(x,y) = \dfrac{\langle x_1,y_2\rangle}{\langle y_2,x_1\rangle}$

Déf : Une theta structure $\Theta_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme $\Theta_{\mathcal{L}} : H(\mathcal{L}) \to \mathcal{G}(\mathcal{L})$

2 Action de $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ sur $\Gamma(\mathcal{L})$

$s\in\Gamma(\mathcal{L}) \qquad g\in\mathcal{G}(\mathcal{L})$
$\qquad\qquad\quad \downarrow$
$\qquad\qquad\quad x$

$g : \mathcal{L} \longrightarrow t_x^*\mathcal{L}$

$g.s = t_{-x}^* g(s) \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ définit une action

Thm (Mackey) : $H(\mathcal{L})$ a une unique repr° (action) irréductible de poids 1 V_0.
→ décrit action de k^*

$$H(\mathcal{L}) \curvearrowright V \qquad V = V_0^r \qquad r = \dim V^{\tilde{K}}$$

$\tilde{K}$ maximal dans $H(\mathcal{L})$

Corollaire : la repr° $\mathcal{G}(\mathcal{L}) \curvearrowright \Gamma(\mathcal{L})$ est irréductible.

D/ $K = K_1(\mathcal{L})$ $\qquad$ $(A, \mathcal{L}) \to (A/K, \mathcal{O}\!\mathcal{L})$

$\tilde{K} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{L})$

$\deg \mathcal{L} = \# K \times \deg \mathcal{O}\!\mathcal{L} \Rightarrow \deg \mathcal{O}\!\mathcal{L} = 1$

$\Gamma(\mathcal{L})^{\tilde{K}} = \Gamma(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) = \langle \theta \rangle$ donc de dim 1

□

Ex de réalisation de V_0 :

$$V_0 = \mathrm{Hom}(K_1(\mathcal{L}), k)$$

$$(\alpha, x_1, x_2) \cdot f \longmapsto \alpha \langle y, x_2 \rangle f(x_2 + y)$$

Corollaire : Une thêta structure $\theta_{\mathcal{L}}$ étant fixée, $\exists !$ base (à mult° par un scalaire près) $(\theta_i)_{i \in K(\mathcal{L})}$ tq $\theta_i(y + x_1 + x_2) = \langle i, x_2 \rangle \theta_{i + x_2}(y)$, $x_1 \in K_1(\mathcal{L})$, $x_2 \in K_2(\mathcal{L})$

Construction explicite des fonctions θ :

θ_0 invariante par $K_2(\mathcal{L})$

Soit $\tilde{K}_2(\mathcal{L})$ la section canonique induite par $\theta_{\mathcal{L}}$.

$(A, \mathcal{L}) \xrightarrow{f} (A/K_2(\mathcal{L}), \mathcal{O}\!\mathcal{L}) \qquad \Gamma(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) = \langle \theta \rangle$

$\theta_0 = f^* \theta$

Si $i \in K_1(\mathcal{L})$, $s(i) \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ $\quad \theta_i = s(i) \theta_0$

Thm de l'isogénie (version algébrique) :

$f : (A, \mathcal{L}) \to (B, \mathcal{O}\!\mathcal{L})$ isogénie

$f^* \mathcal{O}\!\mathcal{L} = \mathcal{L}$

$K = \ker f \Rightarrow K \subset K(\mathcal{L})$ est isotrope pour $e_{\mathcal{L}}$.

* $K = K_1 \times K_2$, $K_1 \subset K_1(\mathcal{L})$, $K_2 \subset K_2(\mathcal{L})$

Oubli : $\theta_{\mathcal{L}} : H(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} G(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \tilde{K}_1(\mathcal{L})$ et $\tilde{K}_2(\mathcal{L})$

* $\tilde{K} \subseteq G(\mathcal{L})$ qui correspond à $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ tq $\tilde{K} = \tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2$, $\tilde{K}_1 \subset \tilde{K}_1(\mathcal{L})$, $\tilde{K}_2 \subset \tilde{K}_2(\mathcal{L})$

* On a une unique thêta structure compatible $\theta_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}} : H(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$

$$Z(\tilde{K}) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{L}}} Z(\tilde{K})/\tilde{K} \xleftarrow{\theta_{\mathcal{L}}} k^* \times K_1^{\perp}/K_1 \times K_2^{\perp}/K_2$$

$Z(\tilde{K}) \subset G(\mathcal{L})$, $Z(\tilde{K})/\tilde{K} \cong \mathcal{G}(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$

$K_1^{\perp}$: en fait $\perp$ de K_2 ; $K_2^{\perp}$: en fait $\perp$ de K_1

$$\xleftarrow{\theta_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}} k^* \times K_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) \times K_2(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) = \mathcal{H}(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$$

Thm : $\exists \lambda \in k^*$, $\forall i \in K_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$

$$f^*(\theta_i^{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}) = \lambda \sum_{\substack{j \in K_1(\mathcal{L}) \\ f(j) = i}} \theta_j^{\mathcal{L}}$$

D/ Pour $\theta \in \Gamma(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$, $g \in G(\mathcal{L})$

$f^*(\alpha_f(g) \cdot \theta) = g \cdot f^* \theta$

Il suffit de montrer le théorème pour $i = 0$: $\exists \lambda$, tq

$$f^* \theta_0 = \lambda \sum_{i \in K_1} \theta_i^*$$

$\theta_0^{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$ est invariante par $\tilde{K}_2(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$, dc $f^* \theta_0^{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$ invariante par $\underbrace{1 \times K_1 \times \overbrace{K_2^{\perp}}^{\text{orthogonal de } K_1}}_{\text{sous-gpe max}}$

□

III Applications

$\mathrm{Pic}^\circ(A) = \{ \mathscr{L} \,/\, \overset{\text{classe de Chern}}{c_1(\mathscr{L})} = 0 \} = \{ \mathscr{L} \text{ antisymétriques} \}$

$\mathscr{L}$ ample, $[-1]^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ est antisymétrique

$$[-1]^*\mathscr{L} \simeq_{alg} \mathscr{L}$$

$\exists c \,/\, [-1]^*\mathscr{L} = t_{c}^*\mathscr{L}$

$\mathscr{L}' = t_{c/2}^*\mathscr{L} \Rightarrow [-1]^*\mathscr{L}' \simeq \mathscr{L}'$

$\mathscr{L}'$ est symétrique.
dans la classe d'équivalence algébrique de $\mathscr{L}$

On peut supposer $\mathscr{L}$ symétrique.

$\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_0 \in \hat{A}[2]$ $\quad t_c^*\mathscr{L}$, $c \in [2]^{-1}K(\mathscr{L})$

$$\{ \mathscr{L}' \text{ symétrique}, \mathscr{L}' \simeq_{alg} \mathscr{L} \} \hookrightarrow \hat{A}[2] \overset{\simeq}{} [2]^{-1}K(\mathscr{L}) / K(\mathscr{L})$$

Corollaire: $L = \mathscr{L}^2$, $\mathscr{L}$ symétrique est uniquement fixé

On dit que L est tot^t sym. Si $L = \mathscr{L}^2$, $\mathscr{L}$ sym.

Ça équivaut à L sym. et $K(L) \supseteq A[2]$

À partir de maintenant, on se place dans ce cadre: $(A, \mathscr{L})$ $\mathscr{L}$ total^t sym.

$$\varepsilon : \begin{aligned} A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Soit $\theta_{\mathscr{L}}$ une theta structure

Déf: $\theta_{\mathscr{L}}$ est dite symétrique si elle est ε-compatible avec elle-même.

Prop: $\delta_{-1} \circlearrowright \mathcal{G}(L)$, par: $\quad \psi \in \mathcal{G}(L)$

$$\mathscr{L} \underset{\alpha}{\simeq} [-1]^*\mathscr{L} \xrightarrow{[-1]^*\psi} t_{-x}^*[-1]^*\mathscr{L} \xrightarrow{t_{-x}^*\alpha} t_x^*\mathscr{L}$$

δ_{-1}, ψ

Déf: $g \in \mathcal{G}(\mathscr{L})$ est dit symétrique si $\delta_{-1} g = g^{-1}$
$\tilde{K} \subseteq \mathcal{G}(L)$ ________ si $\delta_{-1}(\tilde{K}) = \tilde{K}$

Rmq: $\tilde{K}$ sym $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}\!\ell$ est symétrique

Prop: $\theta_{\mathscr{L}}$ est symétrique $\Leftrightarrow$ $\widetilde{K_1(\mathscr{L})}$ et $\widetilde{K_2(\mathscr{L})}$ sont symétriques.
$\Leftrightarrow$ $\theta_{\mathscr{L}}$ commute avec δ_{-1}

Prop: Si $\mathscr{L}$ est totalement symétrique, $\exists\, \theta_{\mathscr{L}}$ symétrique.
(rq: seul de sa classe d'équivalence algébrique).

Corollaire: $\theta_i(-z) = \theta_{-i}(z)$

$$0 \longrightarrow K(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathscr{L})) \longrightarrow Sp(K(\mathscr{L})) \longrightarrow 0$$

$c \longmapsto$ conjugaison ψ_c
$(\alpha, x) \longmapsto (\alpha e_{\mathscr{L}}(c, x), x)$

$$0 \longrightarrow K(\mathscr{L})[2] \longrightarrow \mathrm{Aut}^2(\mathcal{G}(\mathscr{L})) \longrightarrow Sp\,K(\mathscr{L}) \longrightarrow 0$$

2. Deuxième application

$$\xi : \begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \times A \\ (x, y) &\longmapsto (x+y, x-y) \end{aligned}$$

$(A, \mathscr{L})$ $\quad \mathscr{L} * \mathscr{L} = \pi_1^*\mathscr{L} \otimes \pi_2^*\mathscr{L}$

$$\xi^*(\mathscr{L} * \mathscr{L}) = \mathscr{L}^2 * \mathscr{L}^2$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^t\xi\xi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $\theta_{\mathscr{L}} : H(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathscr{L})$, on définit $\theta_{\mathscr{L}} * \theta_{\mathscr{L}} : H(\mathscr{L} * \mathscr{L}) \to \mathcal{G}(\mathscr{L} * \mathscr{L})$

$$\theta_{i,j}^{\mathscr{L} * \mathscr{L}} = \pi_1^*(\theta_i^{\mathscr{L}})\, \pi_2^*(\theta_j^{\mathscr{L}})$$

Question : $\Theta_{\mathcal{L}^2} : \mathcal{H}(\mathcal{L}^2) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{L}^2)$

$\Theta_{\mathcal{L}} : \mathcal{H}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{L})$

À quelle condition est induit-il des Θ-str produits ξ-compatibles ?

Construction : $\Theta_{\mathcal{L}^2} : \mathcal{H}(\mathcal{L}^2) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{L}^2)$ symétrique

$$\Rightarrow K(\mathcal{L}^2) = \underset{\cup\!\shortmid}{K_1(\mathcal{L}^2)} \times \underset{\cup\!\shortmid}{K_2(\mathcal{L}^2)}$$

$$K(\mathcal{L}) = K_1(\mathcal{L}) \times K_2(\mathcal{L})$$

Soit $x \in K_1(\mathcal{L})$. On cherche $g_x \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ lift canonique, symétrique.

deux choix : $(g_x, -g_x)$

Soit $y \in K_1(\mathcal{L}^2)$ / $x = 2y$

$g_y \to y$ $\quad \boxed{g_x = g_y^2}$

$\mathcal{G}(\mathcal{L})$ est entièrement induit par la décomposition $K_1(\mathcal{L}^2) \times K_2(\mathcal{L}^2)$.

Pour $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^n$ $\quad \Gamma(n) \subseteq \{\theta_i\} \subseteq \underset{\Gamma(n, 2n)}{\overset{\shortparallel}{\Gamma(2n)}}$

Thm de l'isogénie appliqué à ξ donne :

$$\theta^{\mathcal{L}}_{i+j}(x+y)\,\theta^{\mathcal{L}}_{i-j}(x-y) = \sum_{t \in K_1(\mathcal{L}^2)[2]} \theta^{\mathcal{L}^2}_{i+t}(x)\,\theta^{\mathcal{L}^2}_{j+t}(y)$$

Changt de variables pr formules + jolies :

Si $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}(2)$ $\quad U^{\mathcal{L}}_{\chi, i} = \sum_{t \in K_1(\mathcal{L})} \chi(t)\,\theta^{\mathcal{L}}_{i+t}$

analytiquement $\theta^{\mathcal{L}}_i = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ i/n \end{bmatrix}\left(z, \frac{\Omega}{n}\right)$

$\theta^{\mathcal{L}^2}_i = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ i/2n \end{bmatrix}\left(z, \frac{\Omega}{2n}\right)$

$U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, i} = \theta\begin{bmatrix} -\chi/2 \\ i/2 \end{bmatrix}\left(2z, \frac{\Omega}{n}\right)$

$$\begin{cases} U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, i}(x)\quad U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, j} = \sum_t \chi(t)\,U_{i+j+t}(x+y)\,\theta_{i-j+t}(x-t) \\ \theta^{\mathcal{L}}_{i+j}(x+y)\,\theta^{\mathcal{L}}_{i-j}(x-y) = \frac{1}{2} \sum_{\chi} U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, i}(x)\,U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, j}(y) \end{cases}$$

Corollaire : $\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in A^4$,

Relations de Riemann

$x_1 + \dots + x_4 = 2z$ $\quad y_i = z - x_i$

$\forall i_1, \dots, i_4 \in K_1(\mathcal{L})$

$i_1 + \dots + i_4 = i$ $\quad j_k = i - i_k$

$$\underbrace{\left(\sum \chi(t)\,\theta_{i_1+t}(x_1)\,\theta_{i_2+t}(x_2)\right)}_{U_{\chi, m_1}(z_1)\ U_{\chi, x_2}(z_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ i_3 & i_4 \end{pmatrix}}_{U_{\chi, x_3}(z_3)\ U_{\chi, m_4}(z_4)} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}}_{U_{\chi, m_1}(z_1)\ U_{\chi, x_3}(z_2)} \overbrace{\begin{pmatrix} y_3 & y_4 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}}^{\dots}$$

$m_1 = \frac{i_1 + i_2}{2} \dots$

Applications

$x =$	0	0	0	0	0	0	0	0	y
	x	x	0	0	0	0	x	x	
	$x+y$	$x-y$	0	0	$-y$	y	x	x	
	$x+y+z$	x	y	z	0	$y+z$	$x+z$	$x+y$	

$$\sum \chi(t)\,\theta_{i+t}(0)\,\theta_{i+t}(0) = U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, \frac{i+j}{2}}\ U^{\mathcal{L}^2}_{\cdot, \frac{i-j}{2}}(0) \neq 0 ?$$

Comment savoir si on a assez de coordonnées non nulles ?

$$\begin{tikzcd} & (A, \mathcal{L}^2) \arrow[dl, "{(x,0)}"'] \arrow[dr, "{(x,x)}"] & \\ (A, \mathcal{L}^2 * \mathcal{L}^2) \arrow[rr, "\xi"'] & & (A, \mathcal{L} * \mathcal{L}) \end{tikzcd}$$

$\Gamma(\mathcal{L}) \otimes \Gamma(\mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}^2)$

$f \otimes g \longmapsto fg$

$\theta_i \otimes \theta_j \longmapsto \sum U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, u}\,U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, v}(0)$ $\qquad u = \frac{i+j}{2}$, $\quad v = \frac{i-j}{2}$

Donc image de $\Gamma(\mathcal{L}) \otimes \Gamma(\mathcal{L})$ dans $\Gamma(\mathcal{L}^2)$

est engendrée par les $U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, i}\,U^{\mathcal{L}^2}_{\chi, j}(0)$ avec $\underset{i-j}{i+j}$ divisibles par 2.

Corollaire : le rg de la mult° est lié aux nb de θ nulle pts non nuls

$$U_{\lambda,i}(-x) = \partial(x)\, U_{\lambda,i}(x)$$

Thm (Mumford, K—, Kempf) :

* $\mathcal{L}_0$ principal symétrique

$$\Gamma(A, \mathcal{L}_0^{\,n}) \otimes \Gamma(A, \mathcal{L}_0^{\,m}) \twoheadrightarrow \Gamma(A, \mathcal{L}_0^{\,n+m}) \quad n \geq 2,\ m \geq 3$$

si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{\,n}$ avec $n > 2$

* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{\,2}$ $\quad \Gamma(A/_{\pm 1}, \mathcal{L}) = \Gamma(A, \mathcal{L})^+$

$$\Gamma(A, \mathcal{L}^n)^+ \otimes \Gamma(A, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow \Gamma(A, \mathcal{L}^{n+1})^+ \quad n > 1.$$

* $n = 1$ niveau 2 $\quad \Gamma(A, \mathcal{L}) \otimes \Gamma(A, \mathcal{L}) \longrightarrow \Gamma(A, \mathcal{L}^2)^+$

surjectif $\iff$ les theta constantes paires sont non nulles.

$$K_A = A/_{\pm 1} \overset{\mathcal{L}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$$

Dans ce cas, on peut calculer à partir de $\theta_i(x)$, $\theta_i(y)$

$$\theta_i(x+y)\,\theta_j(x-y) + \theta_i(x+y)\,\theta_j(x-y)$$

même classe?