Résumé des travaux effectués

Mes centres d'intérêt convergent vers ce que l'on appelle communément la *théorie de Hodge p-adique* (où p désigne un nombre premier). Cette théorie a pour objectif d'une part de classifier et de décrire, à partir d'objets d'algèbre linéaire, les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (ou même d'un corps légèrement plus général), et d'autre part de comprendre comment la cohomologie (étale) des variétés algébriques fournit de telles représentations et d'identifier les données d'algèbre linéaire associées.

La théorie de Hodge p-adique a été développée principalement sous l'influence de Fontaine, bien que ses principaux résultats et ses principales conjectures soient l'œuvre de nombreux auteurs. La théorie rationnelle, c'est-à-dire des $\mathbb{Q}_p$-représentations, est assez bien connue désormais : le volumineux article de Tsuji [Tsu99] et, indépendamment, les travaux de Faltings [Fal] concluent une partie importante du sujet en donnant des démonstrations complètes et générales des principales conjectures, dites de Fontaine-Jannsen.

Pour les cas entier et de torsion, la situation est moins claire. Une première tentative remonte aux articles [FL82] et [FM87] de Fontaine-Laffaille et Fontaine-Messing. Plus récemment, Breuil a introduit de nouveaux objets qui ont permis d'approfondir de façon spectaculaire l'étude de ces théories. Les résultats de Breuil portent simplement sur le cas non ramifié (voir principalement [Bre97a] et [Bre98]). Mes recherches, quant à elles, ont pour objet d'étendre ces résultats en acceptant une certaine forme de ramificiation (voir [Car05], [Cara] et [Carb]).

On considère à partir de maintenant k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans K, $K_0 = \operatorname{Frac} W$ le corps des fractions de W et σ le Frobenius sur W et K_0. On considère K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e. On désigne par π une uniformisante de K et par $E(u)$ le polynôme minimal de π sur K_0 ; il s'agit d'un polynôme d'Eiseistein à coefficients dans W. On appelle finalement $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $G = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K.

1 Construction de représentations p-adiques

La théorie initiée par Breuil permet dans un premier temps de construire des représentations de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ à partir d'objets d'algèbre linéaire qui consistent en des modules sur un anneau S munis de structures supplémentaires.

1.1 L'anneau S

L'anneau S est défini comme le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'algèbre de polynômes $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ (et compatibles aux puissances divisées sur l'idéal (p)). De façon explicite, S est la sous-algèbre de $K_0 [\![u]\!]$ formé des éléments de la forme :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{E(u)^i}{i!}$$

où $a_i \in W[u]$ converge vers 0 pour la topologie p-adique. Cet anneau est muni de deux opérateurs continus (pour la topologie p-adique) N et ϕ respectivement W-linéaire et σ-semi-linéaire définis par $N(u^i) = -iu^i$ et $\phi(u^i) = u^{pi}$. Ces opérateurs vérifient la relation $N\phi = p\phi N$. On définit en outre une filtration sur S par :

$$\mathrm{Fil}^t S = \left\{ \sum_{i=t}^{\infty} a_i \frac{E(u)^i}{i!}\ ,\ a_i \in W[u] \right\}$$

pour tout $t \geqslant 0$. Par commodité, on pose également souvent $\mathrm{Fil}^t S = S$ pour $t < 0$. On a $N(\mathrm{Fil}^t \mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^{t-1}\mathcal{M}$ et lorsque $t < p-1$, on a $\phi(\mathrm{Fil}^t S) \subset p^t S$, ce qui permet de définir le quotient $\phi_t = \frac{\phi}{p^t} : \mathrm{Fil}^t S \to S$. Notons pour finir $c = \phi_1(E(u)) \in S$; c'est un élément inversible.

Les catégories de modules

À partir de S, on peut former plusieurs catégories qui servent d'hôtes aux données d'algèbre linéaire associées aux représentations galoisiennes. Pour cela, on fixe au préalable un entier r vérifiant l'inégalité $0 \leqslant er < p-1$. Du fait que $e \geqslant 1$, cela implique en particulier $r < p-1$, et donc l'opérateur $\phi_r : \mathrm{Fil}^r S \to S$ est bien défini. Breuil propose alors les définitions suivantes (voir [Bre99a]) :

Définition 1. Les objets de la catégorie des modules fortement divisibles (resp. la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$) sont par définition la donnée :

1. d'un S-module $\mathcal{M}$ libre de rang fini (resp. isomorphe à une somme directe finie de $S/p^n S$ pour des entiers n convenables) ;
2. d'un sous-module $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. d'un morphisme ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition :
$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r(s)\phi_r(E(u)^r x)$$
pour tout $s \in \mathrm{Fil}^r S$ et tout $x \in \mathcal{M}$ et tel que $\phi_r(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ comme S-module ;
4. d'une application W-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telle que :
   - pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, on ait $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
   - $E(u)\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$
   - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Les morphismes de cette catégories sont les applications S-linéaires qui commutent aux structures additionnelles.

Remarque. Dans le cas des modules fortement divisibles, la donnée de ϕ_r peut être remplacée par la donnée d'un morphisme ϕ-semi-linéaire $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant $N\phi = p\phi N$.

La proposition suivante, prouvée dans [Bre97a] pour le cas $e = 1$ et dans [Cara] dans le cas général, est essentielle pour les dévissages :

Proposition 2. *On suppose $er < p-1$. La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est abélienne et artinienne.*

1.2 L'anneau de périodes $\hat{A}_{\mathrm{st}}$

Dans [Fon94a], Fontaine introduit l'anneau de périodes A_{cris} que nous n'allons pas redéfinir ici. On rappelle toutefois que A_{cris} est muni d'une filtration (que l'on notera $\mathrm{Fil}^t A_{\mathrm{cris}}$), d'un Frobenius ϕ et d'un action du groupe de Galois G. À partir de ceci, Breuil construit dans [Bre97a], l'objet $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ défini comme suit. En tant qu'anneau, il s'agit de la complétion p-adique de l'algèbre polynomiale à puissances divisées $A_{\mathrm{cris}}\langle X\rangle$ où X est une nouvelle indeterminée. On prolonge la filtration, le Frobenius et l'action de Galois à $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ en posant respectivement :

$$\mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}} = \left\{ \sum_{i \geqslant 0} a_i \frac{X^i}{i!} \, , \, a_i \in \mathrm{Fil}^{t-i} A_{\mathrm{cris}} \, , \, a_i \to 0 \right\}$$

(où par convention $\mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}}$ pour $i < 0$), $\phi(X) = (1+X)^p - 1$ et $gX = [\varepsilon(g)](1+X) - 1$ où $[\varepsilon(g)] \in A_{\mathrm{cris}}$ est un élément formé à partir de l'action de g sur un système compatible de racines p^n-ièmes de π. On définit en outre un opérateur $N : \hat{A}_{\mathrm{st}} \to \hat{A}_{\mathrm{st}}$ comme l'unique dérivation A_{cris}-linéaire vérifiant $N(X) = 1 + X$. On pose aussi $\hat{A}_{\mathrm{st},\infty} = \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_W K_0/W$.

Les données précédentes permettent de définir le foncteur (contravariant) $T^\star_{\mathrm{st}}$ qui à tout module fortement divisible (resp. tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$) associe une représentation galoisienne :

$$T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st}})$$

$$(\text{resp. } T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st},\infty}))$$

où le Hom signfie que l'on considère les morphismes S-linéaires qui respectent le Fil^r, le Frobenius et l'opérateur N.

Le théorème suivant, prouvé en partie dans [Bre97a] pour le cas $e = 1$ et dans [Cara] pour le cas général, résume les propriétés essentielles du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$:

Théorème 3. *On suppose $er < p - 1$. Le foncteur $T^\star_{st}$ est exact et pleinement fidèle. Son image essentielle est indépendante du choix de l'uniformisante π et stable par sous-objets et par quotients.*

2 Représentations d'origine géométrique

On considère, ici, un schéma X_K propre et lisse sur K et on note $X_{\bar{K}} = X \times_K \bar{K}$. Pour tous entiers i et n, la cohomologie étale $H^i_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ fournit une $\mathbb{Z}_p$-représentation galoisienne de torsion. On a envie d'utiliser les objets de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ et le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ pour décrire les représentations galoisiennes obtenues ainsi.

Cela ne va être possible qu'avec des hypothèses supplémentaires sur X que voici. On suppose que X_K est à réduction semi-stable sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$, c'est-à-dire qu'il existe un schéma X sur $\mathcal{O}_K$ qui soit propre, régulier, dont la fibre spéciale définit un diviseur à croisements normaux dans X et finalement tel que $X \times_{\mathcal{O}_K} K = X_K$ (on dit alors que X est un modèle semi-stable de X_K). Ces hypothèses permettent de faire de X un log-schéma log-lisse et d'en considérer sa cohomologie log-cristalline [1].

Pour obtenir un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, il faut être soigneux quant au choix du schéma de base utilisé pour le calcul de la cohomologie log-cristalline. Si $S_n = S/p^nS$, le schéma $E_n = \mathrm{Spec}\, S_n$ est muni de puissances divisées (définies sur l'idéal principal engendré par

1. On oriente le lecteur vers [Kat89] pour la définition et les principales propriétés des log-schémas, ainsi que de la cohomologie log-cristalline.

$E(u)$) et d'une structure logarithmique définie par le morphisme de monoïdes $\mathbb{N} \to S_n$, $1 \mapsto u$. Il en est de même du schéma $T_n = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_K/p^n)$ que l'on munit de puissances divisées sur l'idéal (p) et de la log-structure $\mathbb{N} \to \mathcal{O}_K/p^n$, $1 \mapsto \pi$. Le morphisme $T_n \to E_n$ qui envoie u sur π est un épaississement et permet de voir $X_n = X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K} T_n$ comme un E_n-log-schéma. Le groupe de cohomologie log-cristalline adéquat est alors :

$$\mathcal{M}_i = H^i((X_n/E_n)_{\text{log-cris}}, \mathcal{O}_{X_n/E_n})$$

où $\mathcal{O}_{X_n/E_n}$ est le faisceau structural sur le site $(X_n/E_n)_{\text{log-cris}}$.

Théorème 4. *On suppose $er < p-1$. Pour tout entier $i < r$ (et aussi pour $i = r$ si $n = 1$), le S_n-module $\mathcal{M}_i$ défini précedemment peut-être muni de structures supplémentaires qui en font un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Remarque. Les définitions des opérateurs ϕ_r et N font intervenir la topologie log-syntomique et par le fait dépassent le cadre de cette note. Il est toutefois possible d'expliciter le Fil^r :

$$\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = H^i((X_n/E_n)_{\text{log-cris}}, \mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n})$$

où $\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n}$ désigne la r-ième puissance divisée sur le faisceau $\mathcal{O}_{X_n/E_n}$.

La théorie se boucle par le théorème de comparaison suivant :

Théorème 5. *Avec les notations précédentes, on a une identification canonique et fonctorielle de G-modules :*

$$H^i_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n Z)^\vee \simeq T^\star_{st}(\mathcal{M})$$

(où l'exposant « $^\vee$ » signifie que l'on prend le $\mathbb{Z}_p$-dual) pour tout $i < r$ (et aussi pour $i = r$ si $n = 1$).

Remarque. Les deux théorèmes précédents sont démontrés par Breuil dans [Bre98] dans le cas $e = 1$ et par l'auteur dans [Carb] dans le cas général. Les techniques utilisées font intervenir la topologie (et la cohomologie) log-syntomique qui permet de mener à bien les calculs locaux.

3 Conjecture de l'inertie modérée de Serre

La théorie dont on vient d'énoncer les principaux résultats donne parmi ses applications une preuve de la conjecture de l'inertie modérée de Serre dont nous rappelons l'énoncé. Soit X_K un schéma propre et lisse sur K admettant un modèle semi-stable sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$. La conjecture de Serre concerne les poids de l'inertie modérée [2] de tout quotient de Jordan-Hölder de la représentation galoisienne $V = H^r_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$; exactement, elle stipule que ces poids sont tous compris entre 0 et er.

Brièvement cet énoncé résulte des théorèmes précédents de la façon suivante. Tout d'abord, on remarque que par définition les poids de l'inertie modérée sont compris entre 0 et $p-1$ puisque ce sont des chiffres en base p. On peut donc supposer $er \leqslant p-1$. Le théorème 5 s'applique et on montre à l'aide des propriétés du foncteur $T^\star_{\text{st}}$ qu'un quotient de Jordan-Hölder de V s'obtient comme image par ce foncteur d'un objet simple de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. La conjecture résulte alors du théorème suivant qui donne une classification complète des objets simples dans le cas où le corps résiduel k est algébriquement clos :

2. Pour une définition des poids de l'inertie modérée (et aussi des compléments sur la conjecture de Serre), le lecteur pourra se reporter au premier chapitre de [Ser72].

Théorème 6. *Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il existe une S_1-base $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathcal{M}$ et des entiers $n_1, \dots, n_d$ compris entre 0 et er tels que :*

i) $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ soit l'espace engendré par les $u^{n_i} e_i$ et $\mathrm{Fil}^p S\, \mathcal{M}$;

ii) pour tout i, $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$, les indices étant considérés modulo d ;

iii) pour tout i, $N(e_i) = 0$.

L'image de $\mathcal{M}$ par le foncteur $T^\star_{st}$ est une $\mathbb{F}_p$-représentation irréductible de G dont les poids de l'inertie modérée sont les $m_i = er - n_i$. En particulier, ils sont compris entre 0 et er.

4 Travaux en cours

Je me penche désormais sur la question de la généralisation de la théorie précédente au cas de forte ramification, c'est-à-dire au cas où l'on impose la seule inégalité $r < p - 1$ et aucune condition sur e. Un des problèmes cruciaux qui intervient est, semble-t-il, l'introduction d'une catégorie abélienne qui jouerait le rôle central de $\underline{\mathcal{M}}^r$: lorsque e est quelconque, les catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont encore définies mais ne jouïssent plus des propriétés remarquables mentionnées dans ce texte ; il faut donc trouver une solution alternative.

Pour cela, je suis en train de suivre quelques pistes : les défauts de la catégorie semblent essentiellement provenir de ce que le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ n'est plus conservatif. Ma première idée est donc de mener à bien une construction formelle qui force la propriété de conservativité. Cela fonctionne dans une certaine mesure mais ne donne pas encore toutes les propriétés souhaitées. Une seconde idée qui semble prométeuse est de remplacer la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ par une autre catégorie de modules (plus simple, mais jouïssant de propriétés similaires) introduite par Breuil dans [Bre99b] qui devrait permettre de mener à bien avec plus d'aisance les constructions formelles.

À plus long terme, je pense m'intéresser à introduire des coefficients dans la théorie précédente, ce qui permettrait de donner un cadre général pour l'étude des représentations galoisiennes données par les groupes de cohomologie de la forme $H^i(X_{\bar{K}}, R^j f_\star(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ pour des entiers i, j, n tels que $i + j < p - 1$, certaines variétés X et certains morphismes $f : Y \to X$.

Bibliographie

[Ber74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p*, Lecture notes in math. **407** (1974)

[BM02] C. Breuil et W. Messing, *Torsion étale and crystalline cohomologies*, Astérisque **279**, Soc. math. France (2002), 81–124

[BO78] P. Berthelot et A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton (1978)

[Bre96] C. Breuil, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline, et cohomologie de Cech*, Bull. **124**, Soc. math. France (1996), 587–647

[Bre97a] ———, *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327

[Bre97b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224

[Bre98] ———, *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620

[Bre99a] ———, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122

[Bre99b] ———, *Une application du corps des normes*, Compositio Math. **117** (1999), 189–203

[Cara] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p-1$*, à paraître dans Journal für die reine und angew. Math.

[Carb] ———, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, soumis

[Carc] ———, *Dualité de Cartier et modules de Breuil*, soumis

[Car05] ———, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, thèse (2005)

[Fal] G. Faltings, *Almost étale extensions*, three proceedings

[Fal92] ———, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82

[Fal99] ———, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144

[FL82] J.M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608

[FM87] J.M. Fontaine et W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary math. **67** (1987), 179–207

[Fon94a] J.M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111

[Fon94b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184

[HK94] O. Hyodo et K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 221–268

[Ill90] L. Illusie, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique*, Astérisque **189-190**, Soc. math. France (1990), 325–374

[Kat87] K. Kato, *On p-adic vanishing cycles*, Advanced studies in pure mathematics **10** (1987), 207–251

[Kat89] ———, *Logarithmic structure of Fontaine-Illusie*, Algebraic, Analysis, Geometry and Number Theory , John Hopkins University Press (1989), 191–224

[Ser72] J.P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259–331

[Tsu] T. Tsuji, *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey*

[Tsu99] ———, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411

[Wac97] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. **108** (1997), 185–240

Programme de recherche

Extension de la théorie de Breuil au cas de fortes ramifications et au cas de la cohomologie avec coefficients.

Les travaux que j'ai entrepris jusqu'alors s'inscrivent dans la continuité de la théorie de Breuil pour l'étude des représentations p-adiques semi-stables de torsion. Bien que plusieurs pans de cette théorie soient à ce jour complètement élucidés, il reste de nombreuses situations qui n'ont été pour l'instant que peu étudiées.

Le but de cette note est de présenter deux de ces situations qui seront assurément le support de mes futures recherches. Chacune de ces présentations est agrémentée de plusieurs questions qui doivent faire office de fil directeur pour guider mes recherches.

Mais avant de rentrer dans le vif du sujet, nous nous voyons contraints de rappeler les notations et les objets introduits par Breuil, ainsi que les résultats qu'il a obtenus et que j'ai complétés dans le cadre de ma thèse [1].

Dans toute la suite de cette note, on considère k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans K, $K_0 = \operatorname{Frac} W$ le corps des fractions de W, σ le Frobenius sur W et K_0, K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e. On désigne par π une uniformisante de K et par $E(u)$ le polynôme minimal de π sur K_0 ; il s'agit d'un polynôme d'Eiseistein à coefficients dans W. On appelle finalement $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $G_K = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K.

1 Les résultats connus

Aux données évoquées dans l'introduction et à un entier $r < p - 1$, Breuil associe une catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dont nous rappelons la définition. On introduit en premier lieu l'anneau S défini comme le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ (et compatibles avec les puissances divisées sur (p)) et muni d'un opérateur continu (pour la topologie p-adique) σ-semi-linéaire ϕ défini par $\phi(u^i) = u^{pi}$ et d'un opérateur de monodromie continu W-linéaire N défini par $N(u^i) = -iu^i$. Pour tout entier n, nous notons également $S_n = S/p^nS$. Les objets de la « vaste » catégorie $\mathcal{C}$ sont la données des quatre points suivants :

1. un S-module $\mathcal{M}$ de type fini ;
2. un sous-S-module de $\mathcal{M}$ noté $\operatorname{Fil}^r\mathcal{M}$ contenant $\operatorname{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. une flèche ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \operatorname{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\phi_r(s)\,\phi_r\left((E(u))^r x\right)$$

pour tout $s \in \operatorname{Fil}^r S$ et tout $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\operatorname{im}\phi_r$ engendre $\mathcal{M}$ en tant que S-module

1. Ainsi, les personnes qui ont déjà lu le texte que j'ai fourni sur le résumé de mes travaux peuvent se contenter de survoler rapidement la section 1. Toutefois, j'attire leur attention sur le fait que les définitions données dans cette note pour les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ s'adaptent à des situations plus générales, et de fait diffèrent malheureusement de celles qu'ils auraient pu lire dans l'autre papier.

4. une application W-linéaire $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant les trois conditions :
   – pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
   – $E(u) N(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$
   – le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\ \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Dans $\mathcal{C}$, on a une notion de suite exacte : on dit que la suite $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}''$ est exacte si elle l'est en tant que suite de S-module et si la suite déduite sur les Fil^r est aussi exacte.

On définit finalement $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formé des objets isomorphes en tant que S-module à S_1^n pour un certain entier n, puis la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ comme la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ contenant $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$ et stable par extension.

Lorsque $er < p-1$, on montre (la preuve est essentiellement la même que celle du corollaire 2.1.1.4 de [Bre00]) que ces catégories correspondent aux catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ définies dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et [Bre99] (pour le cas général) et étudiées dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et [Cara] (pour le cas général). La propriété essentielle à retenir est la suivante :

Proposition 1. *Lorsque $er < p-1$, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est abélienne et artinienne.*

Ces catégories sont en outre munies d'un foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$ qui à un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ associe une représentation p-adique de torsion du groupe G_K. Ce foncteur est défini à partir d'un anneau de périodes $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ introduit par Kato et étudié par Breuil. Nous renvoyons à [Cara] pour la définition et l'étude complète de ce foncteur lorsque $er < p-1$, et en particulier la preuve du théorème suivant :

Théorème 2. *Lorsque $er < p-1$, le foncteur $T_{st}^\star$ est exact et pleinement fidèle. Son image essentielle est stable par quotients et sous-objets.*

Finalement, cette théorie présente l'intérêt supplémentaire que les représentations atteintes par le foncteur $T_{\mathrm{st}}^\star$ regroupent celles qui proviennent de la cohomologie étale des variétés propres, lisses sur K et à réduction semi-stable sur l'entier des entiers $\mathcal{O}_K$. Précisément, fixons deux entiers i et n et considérons X_K une telle variété. Muni de la log-structure définie par la fibre spéciale, un modèle semi-stable X de X_K est naturellement un log-schéma log-lisse sur la log-base $T_n = (\mathbb{N} \to \mathcal{O}_K/p^n, 1 \mapsto \pi)$. Ce dernier log-schéma est muni d'un épaississement $T_n \hookrightarrow E_n$ où $E_n = (\mathbb{N} \to S_n, 1 \mapsto u)$, le morphisme étant déduit de celui qui envoie u sur π.

On dénote alors par $\mathcal{M}_i$ le i-ième groupe de cohomologie log-cristalline du faisceau structural sur le site $(X_n/E_n)_{\text{log-cris}}$ où X_n est la réduction modulo p^n de X. Le théorème principal est le suivant :

Théorème 3. *Supposons $er < p-1$ et $i < r$, ou seulement $i \leqslant r$ si $n = 1$.*

Avec les notations précédentes, il est possible de munir $\mathcal{M}_i$ de structures supplémentaires qui en font un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour lequel on a une identification canonique et fonctorielle, compatible à l'action de G_K :

$$T_{st}^\star(\mathcal{M}) = H_{\acute{e}t}^i(X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\vee.$$

Ce théorème est prouvé dans [Bre98] dans le cas $e = 1$ (et sans la restriction $i < r$ si $n > 1$) et dans [Carb] dans le cas général.

2 Le cas de forte ramification

Une première extension évidente de la théorie consiste à étudier la situation lorsque l'hypothèse $er < p - 1$ n'est plus satisfaite. Peu de choses alors restent vraies, semble-t-il. Un des principaux problèmes est la mise en défaut de la proposition 1 qui était cruciale pour mener à bien les nombreux dévissages : la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ n'est plus abélienne !

Les contre-exemples sont très faciles à produire et probablement aussi assez instructifs. On suppose $er \geqslant p - 1$. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ les objets définis par les équations $\mathcal{M} = S_1$, $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{M}$, $\phi_r(1) = 1$ et $\mathcal{M}' = S_1$, $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}' = u^{p-1}\mathcal{M}' + \mathrm{Fil}^p S\, \mathcal{M}'$, $\phi_r(u^{p-1}) = 1$, soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ le morphisme défini par $\phi(1) = u^p$. C'est un jeu de vérifier que f est un morphisme de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme sans pour autant être inversible.

En complément de ceci, le théorème 2 est également violé et un contre-exemple se construit à nouveau en utilisant les objets précédents. Exactement il est encore aisé de vérifier que le morphisme f considéré précédemment devient un isomorphisme après application du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$.

Toutefois, il est encore vrai que le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ est exact (dans le sens où il conserve les suites exactes), la preuve étant la même que celle donnée par Breuil pour le cas $e = 1$ (voir proposition 3.2.3.1 de [Bre97a]).

Les contre-exemples présentés ci-dessus laissent croire que, pour avoir une bonne théorie, il faille forcer le morphisme f précédent à devenir inversible. Plus généralement, si l'on désire aboutir à une catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ abélienne tout en conservant un foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ exact envoyant un objet non nul sur une représentation non nulle [2], il est nécessaire de forcer l'inversibilité de tous les morphismes $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ pour lesquels $T^\star_{\mathrm{st}}(f)$ est un isomorphisme. En effet, en notant $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{C}$) le noyau (resp. le conoyau) de f, on doit être en présence d'une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{C}) \longrightarrow T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}_2) \xrightarrow{\sim} T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}_1) \longrightarrow T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{K}) \longrightarrow 0$$

d'où on déduit la nullité de $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{K})$ et $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{C})$, puis celle de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{C}$ et finalement l'inversibilité du morphisme f.

Ces remarques conduisent naturellement à introduire une catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ dans laquelle on aurait inverser formellement les flèches qui s'envoient *via* $T^\star_{\mathrm{st}}$ sur des isomorphismes. Pour cela, deux constructions semblent envisageables :

1. obtenir $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ comme un localisé de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (localisation en les morphismes qui s'envoient par $T^\star_{\mathrm{st}}$ sur des isomorphismes) ;
2. définir tout d'abord les catégories $\underline{\mathcal{C}}_{\mathrm{loc}}$ et $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}_{\mathrm{loc}}$ par localisation à partir respectivement de $\mathcal{C}$ et $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$, puis obtenir $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ comme la plus petite sous-catégorie de $\underline{\mathcal{C}}_{\mathrm{loc}}$ contenant $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}_{\mathrm{loc}}$.

Quelle que soit la définition retenue, le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ se prolonge plus ou moins tautologiquement en un foncteur (que l'on note encore $T^\star_{\mathrm{st}}$) de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ dans la catégorie des représentations galoisiennes. La question qui soustend toute notre démarche est bien sûr la suivante :

2. Le lecteur aura pu remarquer que plutôt que de l'exactitude et de la propriété supplémentaire donnée, notre déduction résulte de la pleine fidélité. Toutefois, autant il est possible que l'on puisse se satisfaire d'une théorie dans laquelle le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ ne serait pas plein, autant les propriétés annoncées semblent respectivement essentielle (ne serait-ce que pour les dévissages) et anodine.

Question 1. La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ (pour une des deux définitions précédentes) est-elle abélienne pour tout $r < p-1$? Le cas échéant, le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ est-il exact et pleinement fidèle ?

Bien entendu, une autre interrogation qui vient à l'esprit (mais qui est probablement moins importante) est :

Question 2. Les deux constructions données précédemment fournissent-elles des catégories $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ équivalentes ?

Remarque. La première construction envisagée semble plus simple sur tous les points et le lecteur peut peut-être se demander l'intérêt d'adopter plutôt la seconde méthode. Celui-ci réside dans le fait qu'elle fournit un cadre général, justement donnée par la catégorie $\underline{\mathcal{C}}_{\mathrm{loc}}$, pour faire certaines constructions (typiquement de noyaux et de conoyaux). Une question centrale semble donc être :

Question 3. La catégorie $\underline{\mathcal{C}}_{\mathrm{loc}}$ (obtenue par localisation à partir de $\mathcal{C}$, voire d'une autre « vaste » catégorie contenant $\underline{\mathcal{M}}^r$) admet-elle des noyaux et des conoyaux ?

Hormis peut-être l'utilisation de critères généraux qui me sont pour l'instant inconnus, une première étape en vue d'apporter une réponse à la question 1 consiste à obtenir une description plus terre à terre de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$, ou du moins d'une sous-catégorie qui l'« engendrerait » en un certain sens. Un premier candidat est bien entendu la sous-catégorie des objets annulés par p, ou éventuellement si cela diffère la sous-catégorie définie par $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}_{\mathrm{loc}}$.

Cependant, il est envisageable que l'on puisse disposer d'une sous-catégorie encore plus petite, plus explicite, et par le fait plus manipulable. On rappelle, à bon escient, que lorsque $er < p-1$ et le corps k est algébriquement clos, on connait une classification complète des objets simples de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (voir paragraphe 4.3 de [Cara]). Cette classification n'est peut-être plus valable lorsque $er \geqslant p-1$, mais il paraît quand même judicieux d'introduire l'équivalent de ces objets simples dans ce contexte plus général. Exactement on pose la définition suivante :

Définition 4. Soit $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)$ une suite finie d'entiers compris entre 0 et er. On lui associe l'objet $\mathcal{M}(\underline{n})$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ défini de la façon suivante :

1. $\mathcal{M}(\underline{n}) = \bigoplus_{i=1}^d S_1 e_i$;
2. $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}(\underline{n}) = \mathrm{Fil}^p S \cdot \mathcal{M}(\underline{n}) + \sum_{i=1}^d S_1 u^{n_i} e_i$;
3. pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $\phi_r(u^{n_i} e_i) = e_{i+1}$;
4. pour tout i, $N(e_i) = 0$.

Remarque. Les objets de la forme $\mathcal{M}(\underline{n})$ sont déjà apparus dans cette note. Exactement, les objets $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ introduits au début de cette section sont respectivement $\mathcal{M}(1)$ et $\mathcal{M}(p-1)$. Deux objets de la forme précédente peuvent donc être isomorphes dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ sans que les suites qui les définissent soient égales (ce qui n'étaient essentiellement pas le cas lorsque $er < p-1$). Plus précisément, à toute suite $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)$, on associe (comme dans le cas $er < p-1$) un nombre rationnel défini par :

$$r(\underline{n}) = \frac{n_1 p^{d-1} + n_2 p^{d-2} + \cdots + n_{d-1} p + n_d}{p^d - 1}.$$

Généralisant les derniers résultats du paragraphe 4.3 de [Cara], il semble raisonnable de penser (et il ne doit pas être très difficile de prouver) que la réponse à la question suivante est affirmative.

Question 4. Soient $\underline{n}$ et $\underline{m}$ deux suites finies d'entiers compris entre 0 et er. Est-il vrai que les objets $\mathcal{M}(\underline{n})$ et $\mathcal{M}(\underline{m})$ sont isomorphes dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ si, et seulement si $r(\underline{n}) \equiv p^k\, r(\underline{m}) \pmod{\mathbb{Z}}$ pour un certain entier k ?

Voici une question plus essentielle :

Question 5. Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$. Est-il vrai que $\mathcal{M}$ admet nécessairement un sous objet de la forme $\mathcal{M}(\underline{n})$? Le cas échéant, est-il également vrai qu'il existe une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$ de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(\underline{n}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

pour un certain objet $\mathcal{N} \in \underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$?

Une réponse affirmative à cette question signifierait que l'on a défini précédemment les briques de la construction de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$. On serait alors probablement plus proche d'apporter une réponse à la première partie de la question 1 : en effet, on pourrait entreprendre de construire par dévissage les noyaux et les conoyaux des morphismes de $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ et montrer de surcroît (toujours par dévissage) que le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ commute à ceux-ci (et donc est exact). Et d'en déduire que si $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ est un morphisme de $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ alors la flèche induite $T^\star_{\mathrm{st}}(\mathrm{im}\, f) \to T^\star_{\mathrm{st}}(\mathrm{coim}\, f)$ est un isomorphisme, d'où l'inversibilité du morphisme canonique $\mathrm{coim}\, f \to \mathrm{im}\, f$. Ce plan rustique ne doit certainement pas cacher qu'il reste encore foule de détails à régler.

En outre, une réponse affirmative à la question 5 permettrait sans doute de déterminer les objets simples de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$. Une fois ceux-ci connus, il devient envisageable d'adapter la preuve du corollaire 5.3.4 de [Cara] pour obtenir la fidélité du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$. Dans le cas $er < p-1$, la pleine fidélité de ce foncteur résulte (voir section 6 de [Cara]) de la bonne connaissance de la sous-catégorie formée des objets tués par p et de calculs explicites parfois laborieux. Il ne parait pas clair à première vue que cela puisse se généraliser sans heurt ; c'est un point que je vais devoir examiner de près.

Voici finalement une question sans doute un peu floue mais intéressante pour mieux visualiser la structure de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ et peut-être même cruciale pour pouvoir conclure certaines démonstrations :

Question 6. Peut-on donner une description simple des morphismes f de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (ou plus humblement de $\underline{\mathcal{M}}^{r,S_1}$) pour lesquels $T^\star_{\mathrm{st}}(f)$ est un isomorphisme ?

Intéressons-nous désormais à la géométrie. La point essentiel est de savoir s'il existe un équivalent du théorème 3 dans le contexte $er \geqslant p-1$. Précisément :

Question 7. Soit X un schéma propre et semi-stable sur l'anneau $\mathcal{O}_K$, et soient i et n deux entiers vérifiant $i < r$ (voire seulement $i \leqslant r$). Peut-on associer à X un objet $\mathcal{M}$ de $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ (construit à partir de la cohomologie log-cristalline de X) muni d'un isomorphisme :

$$T^\star_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \simeq H^i_{\text{ét}}(X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\vee$$

de façon canonique et fonctorielle ?

Lorsque $n = 1$, il est possible (dans une certaine mesure) de mener à bien des calculs locaux qui, très probablement, devraient aboutir à une réponse affirmative à la question précédente pour $i \leqslant r$. Les propriétés de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{\mathrm{loc}}$ et du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ que nous avons mentionnées précédemment devraient s'avérer des atouts cruciaux pour mener à terme les dévissages qui permettraient d'atteindre les $n > 1$; cependant, il ne faut pas se leurrer : il est certain qu'il reste encore un grand nombre de détails techniques à régler et probablement nombre de difficultés sérieuses à surmonter.

3 Le cas de la cohomologie avec coefficients

On conserve la situation géométrique décrite juste avant : la lettre X désigne un schéma propre et semi-stable sur $\mathcal{O}_K$, tandis que pour tout entier n, X_n désigne la réduction de X modulo p^n. On sera en outre amené à utiliser à nouveau les (log-)bases T_n et E_n introduites dans la section 1 : on rappelle qu'en tant que schéma, $T_n = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_K/p^n)$ et $E_n = \mathrm{Spec}\,(S/p^nS)$.

Une autre extension possible de la théorie consiste à définir un cadre qui prend en compte les objets de cohomologie :

$$H^i_{\text{ét}}(X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}, \mathcal{F})$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau étale (de coefficients) non nécessairement constant, mais typiquement de la forme $R^j f_\star(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ pour des entiers n et j et un morphisme $f : Y \to X$ (sans doute propre et semi-stable).

Il est certain que de tels groupes de cohomologie interviennent naturellement dans un très grand nombre de questions, et qu'il semble évident que la systématisation de l'étude de ces groupes fournirait des outils puissants pour la résolution de ces questions.

L'idée pour aboutir à cet objectif est déjà présente dans la théorie de Hodge usuelle et Faltings[3] a déjà proposé de l'utiliser dans le contexte p-adique dans [Fal92]. Pour en simplifier l'exposition, on suppose que r est un entier fixé vérifiant $er < p-1$. Il s'agit tout d'abord de définir une version « faisceautique » de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ qui a pour but de servir d'hôte à ces fameux coefficients ; les objets doivent donc être initialement des cristaux sur le site cristallin $(X_n/E_n)_{\text{LOG-CRIS}}$. Pour ce faire, on débute par remplacer l'anneau S_n par le cristal $\mathcal{O}_{X_n/E_n}$ et l'idéal $\mathrm{Fil}^r S$ par le faisceau $\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n}$. On aimerait en outre avoir un équivalent des structures supplémentaires présentes sur S à savoir les morphismes ϕ_r et N. Toutefois, ceux-ci ne sont pas définis directement sur le site cristallin mais seulement sur le site syntomique. Nous renvoyons par exemple à [Bre98] pour la définition de ce site et des principaux faisceaux qui y habitent, mais nous rappelons malgré tout que si $\mathcal{F}$ désigne un faisceau sur le site $(X_n/E_n)_{\text{LOG-CRIS}}$, la formule :

$$\mathcal{F}_{\text{syn}}(U) = H^0((U/E_n)_{\text{LOG-CRIS}}, \mathcal{F}_{|U/E_n})$$

définit un faisceau sur le petit site syntomique $(X_n)_{\text{syn}}$. Si l'on part de $\mathcal{O}_{X_n/E_n}$ et $\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n}$, la recette précédente fournit respectivement des faisceaux qui sont notés $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[r]}$. Pour tout $r < p-1$, on dispose alors (voir paragraphe 3.2.2 de [Carb]) de morphismes de faisceaux $\phi_r : \mathcal{J}_n^{[r]} \to \mathcal{O}_n^{\text{st}}$ (qui joue bien le même rôle que le morphisme $\phi_r : \mathrm{Fil}^r S \to S$) et $N : \mathcal{O}_n^{\text{st}} \to \mathcal{O}_n^{\text{st}}$ (qui, lui, joue le même rôle que $N : S \to S$).

Les remarques précédentes conduisent à poser la définition naïve[4] suivante :

Définition 5. On fixe un entier n. On définit les objets de la catégorie[5] $\underline{\mathcal{M}}^r_{X,n}$ comme la donnée des points suivants :

1. un cristal quasi-cohérent $\mathcal{M}$ en $\mathcal{O}_{X_n/E_n}$-modules sur le site $(X_n/E_n)_{\text{LOG-CRIS}}$ (dont on note $\mathcal{M}_{\text{syn}}$ le faisceau syntomique associé) ;

3. Toutefois Faltings n'était pas en mesure d'obtenir une théorie entièrement satisfaisant, faute de disposer de l'axiomatique des catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

4. Il sera très certainement nécessaire de rafistoler ces axiomes en plusieurs endroits.

5. Cette catégorie correspond moralement à la sous-catégorie de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formés des objets annulés par p^n. Pour obtenir un équivalent de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$, il faut ensuite considérer la réunion croissante de toutes les catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{X,n}$.

2. un sous-faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{M}$ noté $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ (dont on note $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{\mathrm{syn}}$ le faisceau syntomique associé) contenant $\mathcal{J}^{[r]}_{X_n/E_n}\cdot\mathcal{M}$;
3. un morphisme ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{\mathrm{syn}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{syn}}$ dont l'image engendre $\mathcal{M}_{\mathrm{syn}}$ en tant que $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n$-module et vérifiant la condition supplémentaire :

$$\phi_r(t)\phi_r(sx) = \phi_r(s)\,\phi_r(tx)$$

pour toutes sections (locales) s et t de $\mathcal{J}^{[r]}_n$ et toute section x de $\mathcal{M}_{\mathrm{syn}}$
4. un morphisme $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant les trois conditions :
   – pour toute section (locale) s de $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n$ et toute section x de $\mathcal{M}_{\mathrm{syn}}$:

$$N(sx) = N(s)\,x + sN(x)$$

   – $\mathcal{J}^{[1]}_n N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{\mathrm{syn}}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{\mathrm{syn}}$
   – le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}^{[1]}_n \otimes_{(\phi),\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{\mathrm{syn}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\phi_r"] \arrow[d, "id\otimes N"'] & \mathcal{J}^{[1]}_n \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{syn}} \arrow[d, "\phi_1\otimes N"] \\
\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n \otimes_{(\phi),\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n} \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}_{\mathrm{syn}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\phi_r"] & \mathcal{M}_{\mathrm{syn}}
\end{tikzcd}$$

Les morphismes de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r_{X,n}$ sont les morphismes de faisceaux qui sont compatibles aux structures supplémentaires.

On prouve facilement que l'évaluation sur l'épaississement $T_n \hookrightarrow E_n$ induit une équivalence de catégorie entre $\underline{\mathcal{M}}^r_{n,\mathcal{O}_K}$ et la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ constituée des objets tués par p^n. Autrement dit, lorsque le schéma X s'identifie à la base $\mathcal{O}_K$, on retrouve la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Question 8. Les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r_{X,n}$ définies précédemment sont-elles abéliennes ?

Cherchons à présent un analogue du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$. Dans le cas connu, il associait à tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ une représentation galoisienne de G_K, c'est-à-dire en réalité un faisceau étale sur le site $K_{\text{ét}}$. La version faisceautique semble évidemment plus propice à s'avérer le bon point du vue pour ce que l'on souhaite faire ici. On aimerait donc un foncteur $T^\star_{\mathrm{st}\,X}$ qui à tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r_{n,\mathcal{O}_K}$ associe un faisceau étale sur le site $(X_K)_{\text{ét}}$ où par définition $X_K = X \times_{\mathcal{O}_K} K$.

Après examen de la définition du foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ que l'on possède, il paraît évident que si $\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, le faisceau $T^\star_{\mathrm{st}\,X}(\mathcal{M})$ est rélié d'une manière ou d'une autre au faisceau syntomique :

$$\mathscr{H}om(\mathcal{M}_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n)$$

où la notation $\mathscr{H}om$ sous-entend que l'on prend les morphismes compatibles à toutes les structures supplémentaires (Fil^r, ϕ_r et N). Il paraît surprenant de constater, semble-t-il, la disparition de toute trace d'un anneau de période (du type $\hat{A}_{\mathrm{st}}$) dans cette dernière écriture, mais c'est simplement oublié que celui-ci est caché dans le faisceau $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n$ puisque l'on sait que $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}_n(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ s'identifie à $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n\hat{A}_{\mathrm{st}}$. Suffit-il ensuite de restreindre[6] ce faisceau au site étale $(X_K)_{\text{ét}}$? Ou faut-il faire une construction plus rusée ? C'est une des nombreuses questions que je devrais me poser, la plus centrale étant :

6. Notez que la topologie syntomique est plus fine que la topologie étale.

Question 9. La foncteur $T^\star_{\mathrm{st}X}(\mathcal{M})$ est-il exact et pleinement fidèle ?

Il est sur tout point envisageable que les travaux de Brinon (voir [Bri]) apparaissent comme une aide certaine pour l'étude de cette question. En effet, bien que formulé en des termes différents, Brinon étudie des objets très proches puisqu'il construit des anneaux de période dans une situation relative qui s'interprètent très certainement comme l'évaluation du faisceau $\mathcal{O}_n^{\mathrm{st}}$ sur certains épaississements, ou peut-être comme un groupe de cohomologie de ce faisceau. Trouver le lien précis qui relie ces objets permettra, je pense, une compréhension bien meilleure des phénomènes.

La théorie se bouclerait finalement par un équivalent du théorème 3 qui se matérialiserait par une réponse affirmative à la question suivante :

Question 10. Soit $f : Y \to X$ un morphisme (propre et semi-stable) entre deux variétés propres et semi-stables sur $\mathcal{O}_K$. Soient i, j et n des entiers soumis à la contrainte $e(i+j) < p-1$, et soit $\mathcal{M}$ un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^j_Y$. Notons $f_\star$ le morphisme de topoï induit sur les sites étales et $f_{\text{LOG-CRIS}\star}$ celui induit entre les sites cristallins $(Y_n/E_n)_{\text{LOG-CRIS}}$ et $(X_n/E_n)_{\text{LOG-CRIS}}$. Est-il vrai d'une part que $R^i f_{\text{LOG-CRIS}\star}$ est naturellement un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{i+j}_X$ et d'autre part que l'on a une identification :

$$T^\star_{\mathrm{st}X} R^i f_{\text{LOG-CRIS}\star}\mathcal{M} = R^i f_\star(T^\star_{\mathrm{st}Y}\mathcal{M})$$

qui soit canonique est fonctorielle ?

Sur la formulation précédente, on remarque que la question des coefficients est semblable à une autre généralisation à un cas relatif, le théorème 3 correspondant au cas où $X = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$.

Par ailleurs, si la réponse à la question 10 est affirmative, il est important de se convaincre que l'on a bien atteint l'objectif décrit au début de cette section. En effet, en appliquant une première fois le résultat au morphisme $f : Y \to X$ et à $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{Y_n/E_n}$, on montre que le faisceau étale $R^j f_\star(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ (peut-être à un twist ou une dualité près) se réalise comme image d'un objet de $\underline{\mathcal{M}}^j_Y$ par le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}Y}$, et en appliquant ensuite une seconde fois le résultat au morphisme $f : X \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on obtient une « description » du groupe de cohomologie étale $H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{K}}, R^j f_\star(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ comme annoncé.

Insistons une dernière fois sur le fait qu'il est bien évident qu'il va falloir modifier peut-être simplement de façon anodine, sans doute de façon plus substentielle, les définitions et les énoncés évoqués précédemment. Le but de cette note n'est certainement pas de donner des énoncés précis mais de dégager un plan de recherche qui dirigera mon travail dans les années à venir.

4 Autres questions

Pour finir, mentionnons que dans le paragraphe 9.2 de [BM02], Breuil et Messing posaient déjà plusieurs questions (principalement au sujet des catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$) qui sont à ma connaissance encore ouvertes à ce jour. Par exemple, ils se demandaient si l'on pouvait obtenir des informations sur la ramification des représentations galoisiennes obtenues comme image par le foncteur $T^\star_{\mathrm{st}}$ des objets de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Également, en restant volontairement flou pour ne pas encore trop allonger ce texte, ils proposaient de trouver des relations entre les « poids de Hodge-Tate » d'une représentation galoisienne semi-stable et de sa réduction modulo p. Breuil a mené des calculs complets dans [Bre97a] pour le cas de la dimension 2 qui montrent déjà que la situation est bien plus complexe que dans le cas des représentations cristallines.

Toutes ces questions et quelques autres encore demeurent d'actualité et il est tout à fait envisageable que j'y consacre quelques efforts à court ou moyen terme.

Bibliographie

[Ber74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p*, Lecture notes in math. **407** (1974)

[BM02] C. Breuil et W. Messing, *Torsion étale and crystalline cohomologies*, Astérisque **279**, Soc. math. France (2002), 81–124

[BO78] P. Berthelot et A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton (1978)

[Bre96] C. Breuil, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline, et cohomologie de Cech*, Bull. **124**, Soc. math. France (1996), 587–647

[Bre97a] ———, *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327

[Bre97b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224

[Bre98] ———, *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620

[Bre99] ———, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122

[Bre00] ———, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549

[Bri] O. Brinon, *Représentations p-adiques cristallines et de De Rham dans le cas relatif* (en préparation)

[Cara] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p-1$*, à paraître dans Journal für die reine und angew. Math.

[Carb] ———, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, soumis

[Car05] ———, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, thèse (2005)

[Fal] G. Faltings, *Almost étale extensions*, three proceedings

[Fal92] ———, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82

[Fal99] ———, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144

[FL82] J.M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608

[FM87] J.M. Fontaine et W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary math. **67** (1987), 179–207

[Fon94a] J.M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111

[Fon94b] ———, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184

[HK94] O. Hyodo et K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 221–268

[Ill90] L. Illusie, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique*, Astérisque **189-190**, Soc. math. France (1990), 325–374

[Kat87] K. Kato, *On p-adic vanishing cycles*, Advanced studies in pure mathematics **10** (1987), 207–251

[Kat89] ———, *Logarithmic structure of Fontaine-Illusie*, Algebraic, Analysis, Geometry and Number Theory , John Hopkins University Press (1989), 191–224

[Ser72] J.P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259–331

[Tsu] T. Tsuji, *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey*

[Tsu99] ———, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411

[Wac97] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Comp. Math. **108** (1997), 185–240

Liste de publications

Thèse

[1] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, thèse de doctorat, 221 pages.

Articles de recherche

[1] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p - 1$*, à paraître dans Journal für die reine und angew. Math., 52 pages.

[2] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, préprint Paris 13, 57 pages.

[3] X. Caruso, *Dualité de Cartier et modules de Breuil*, préprint Paris 13, 23 pages.

Autres articles

[1] X. Caruso, *Puiseux et les coefficients en t*, Tangente hors-série *Les équations algébriques*, pp 116–121.

[2] P. Bornsztein, X. Caruso, *Des formes bilinéaires en combinatoire*, RMS, **(114 n° 3)**, 8 pages.

[3] P. Bornsztein, X. Caruso, *Des formes bilinéaires en combinatoire II*, RMS, **(115 n° 3)**, 2 pages.