

Groupe de travail pour élèves de lycée

Les groupes de Coxeter

par

Joël RIOU

(Texte produit et tapé par Xavier CARUSO)

Le 12 octobre 2003

Table des matières

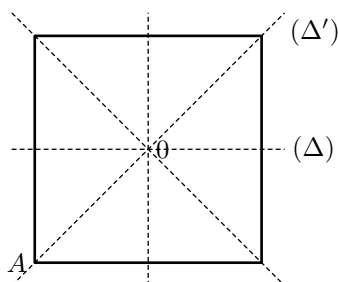
1	Isométries d'une figure	2
1.1	Le carré	2
1.2	Le pentagone	3
1.3	Les autres polygones réguliers	3
1.4	Le tétraèdre	4
2	Description algébrique de ces isométries	6
2.1	Le groupe diédral	6
2.2	Le groupe symétrique	8
3	La situation générale	11
3.1	Groupes de Coxeter	12
3.2	Murs et chambres	13
3.3	Une description combinatoire	16
3.4	Revisitons nos premiers exemples	18
3.5	Quelques idées de preuve	19

1 Isométries d'une figure

Nous allons aborder le sujet par des exemples. Dans tout ce chapitre, on se donne plusieurs figures mathématiques et pour chacune d'elle on étudie l'ensemble des isométries du plan (ou de l'espace) qui la laisse globalement invariante.

1.1 Le carré

La première figure que l'on considère est le carré. On remarque facilement qu'il y a quatre symétries orthogonales qui le laissent stable ; ce sont celles dont les axes sont représentés en pointillé sur la figure ci-dessous :



En plus de cela, il y a quatre rotations de centre O , celle d'angle 0 , celle d'angle $\frac{\pi}{2}$, celle d'angle π et finalement celle d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Et en fait, ce sont les seules. Ce n'est pas bien difficile de s'en convaincre. Pour cela, on commence par remarquer que l'image du point A par une isométrie du plan qui laisse stable le carré doit forcément être un sommet du carré, ce qui nous laisse quatre possibilités. Une fois cette image fixée, on n'a plus que deux choix qui correspondent au sens de parcours du carré.

Au final, il ne peut y avoir plus de huit isométries du carré, et on en a déjà trouvé huit ; le compte est bon.

Il est intéressant maintenant de remarquer que toutes ces isométries peuvent s'obtenir à partir seulement des deux réflexions s et s' d'axes respectifs (Δ) et (Δ') . En effet, on obtient la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ en composant s et s' dans cet ordre. On obtient toutes les rotations en répétant plusieurs fois cette composition. Obtenir les autres symétries est un peu plus délicat mais encore très raisonnable. L'idée pour cela est de « conjuguer » ; de façon générale, énonçons un fait :

Fait 1 (Conjugaison). *La composée d'une rotation d'angle α , de la symétrie par rapport à l'axe (D) , et d'une rotation d'angle $-\alpha$ s'identifie à la symétrie par rapport à une certaine droite (D') faisant un angle $-\alpha$ avec la droite (D) .*

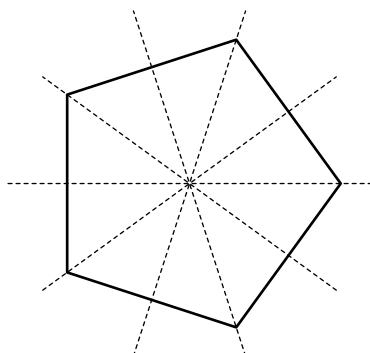
Ce fait est très général et il nous resservira plusieurs fois ; il est donc bienvenu de s'en rappeler. Voyons comment il s'applique à notre cas. Si l'on veut faire la symétrie par rapport à la droite verticale, il nous suffit de conjuguer la symétrie d'axe (Δ) par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Cela nous donne, en développant, l'expression suivante :

$$(s \circ s')^{-1} \circ s \circ (s \circ s') = s' \circ s \circ s \circ s' = s' \circ s \circ s'$$

puisque $s' = s'^{-1}$ et $s = s^{-1}$. Finalement, en échangeant les rôles de s et s' , on obtient la symétrie restante qui s'écrit donc $s \circ s' \circ s$.

1.2 Le pentagone

Voyons maintenant le cas du pentagone régulier, très analogue au cas précédent.



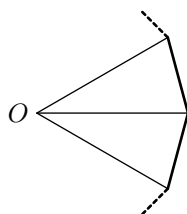
Parmi les isométries qui laissent stable le pentagone régulier, il y a toutes les symétries dont les axes ont été tracés en pointillé sur la figure précédente. On en compte cinq. Il y a ensuite la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et tous ses « multiples », ce qui donne un total de dix isométries.

Pour la même raison que le carré, ce sont les seules : un sommet du pentagone doit forcément s'envoyer sur un autre sommet, et une fois ce choix-là fait, le sens de parcours des sommets détermine complètement l'isométrie.

Également, on remarque que les dix transformations précédentes peuvent s'écrire simplement à l'aide de deux symétries. Comme pour le carré, on commence par choisir deux axes « consécutifs », on appelle s et s' les symétries par rapport à ces axes. On constate alors que $s \circ s'$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ (ou $-\frac{2\pi}{5}$ selon ce que l'on a choisi d'appeler s et s'). On obtient ainsi toutes les rotations. Pour obtenir les symétries qui nous manquent, on conjugue les symétries que l'on a par rapport aux rotations que l'on vient de construire.

1.3 Les autres polygones réguliers

Les deux exemples précédents se généralisent sans effort supplémentaire au cas du polygone régulier à n côtés. Si l'on appelle O le centre de ce polygone, les sommets sont régulièrement espacés sur un cercle de centre O , l'angle entre deux d'entre eux consécutifs étant $\frac{2\pi}{n}$. Bref, on a la configuration suivante :



Trouver les rotations qui laissent invariant le polygone est assez simple ; il y a celle de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et tous ses multiples. Cela fait donc n rotations.

Pour les symétries, c'est un peu plus compliqué. Bien qu'au final ce ne soit pas nécessaire, il est peut-être utile pour mieux visualiser de commencer par distinguer les cas n pair et n impair. Déjà si A est un sommet du polygone, la droite (OA) est toujours axe de symétrie. Cependant, il faut faire attention : cela ne donne pas toujours n symétries.

Si n est pair et si A et B sont des sommets diamétralement opposés, les droites (OA) et (OB) sont confondues et fournissent alors la même symétrie (voir le cas du carré). Si n est impair par contre, on obtient bien n symétries distinctes.

Mais il y a d'autres symétries qui entrent en jeu : ce sont celles d'axe (OI) , I étant le milieu d'un côté du polygone. Là encore, si n est pair, on n'obtient que $\frac{n}{2}$ symétries et si n est impair on en obtient n . Seulement, dans le cas n pair, on obtient de nouvelles symétries, alors que dans le cas n impair, on retrouve les mêmes.

En résumé, dans tous les cas, on trouve ainsi n symétries. D'autre part on peut les décrire plus simplement. Fixons A un sommet et appelons (Δ_0) la droite (OA) . Appelons ensuite pour tout i , (Δ_i) la droite qui passe par O et qui fait un angle $i\frac{\pi}{n}$ avec (Δ_0) . On obtient comme cela n droites¹ et les n symétries qui laissent invariant le polygone régulier sont les symétries par rapport à ces droites.

Récapitulons : on a trouvé n rotations et n symétries. Il n'y a en fait rien de plus. La preuve est en tout point similaire aux précédentes. On note A un sommet de polygone. Une isométrie du plan laissant stable le polygone envoie forcément A sur un autre sommet du polygone. Il ne reste plus qu'à fixer le sens de parcours pour déterminer complètement l'isométrie.

Là encore, le résultat selon lequel toutes ces isométries peuvent s'écrire simplement à l'aide de deux symétries fixées à l'avance demeure. On appelle respectivement s_0 et s_1 les symétries d'axes respectifs les droites (Δ_0) et (Δ_1) . La composée $r = s_1 \circ s_0$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la composée $s_0 \circ s_1$ est celle d'angle $-\frac{2\pi}{n}$. On conjugue maintenant pour obtenir les autres symétries. Plus exactement d'après le fait cité dans le premier paragraphe, la composée :

$$(s_1 \circ s_0)^i \circ s_0 \circ (s_0 \circ s_1)^i = \underbrace{(s_1 \circ s_0) \circ \dots \circ (s_1 \circ s_0)}_{i \text{ fois}} \circ s_0 \circ \underbrace{(s_0 \circ s_1) \circ \dots \circ (s_0 \circ s_1)}_{i \text{ fois}}$$

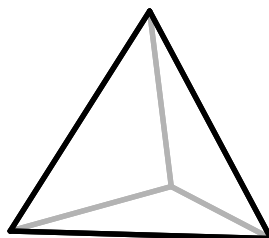
est la symétrie d'axe (Δ_{2i}) et la composée :

$$(s_1 \circ s_0)^i \circ s_1 \circ (s_0 \circ s_1)^i$$

est la symétrie d'axe (Δ_{2i+1}) . Ceci prouve bien ce que l'on désirait.

1.4 Le tétraèdre

Traitons maintenant le cas le plus simple d'une figure de dimension 3. C'est celui du tétraèdre régulier représenté ci-dessous :



Pour déterminer les symétries de cet objet, on remarque qu'une telle symétrie induit une permutation² des quatre sommets A , B , C et D . Cette remarque nous a déjà été utile

¹Les angles de droites sont définis modulo π . Plus exactement les droites qui font un angle α et $\pi + \alpha$ avec une droite fixée sont en fait parallèles et donc de même direction.

²Dans ce paragraphe, une permutation sera simplement la liste des quatre sommets écrits dans un certain ordre.

nombre de fois mais là, on peut encore aller plus loin ; plus précisément on a une correspondance parfaite entre les isométries stabilisant le tétraèdre et les précédentes permutations. Autrement dit, si l'on se donne une permutation des quatre sommets, il existe une et une unique isométrie de l'espace envoyant le premier sommet de la permutation sur A , le deuxième sur B , le troisième sur C et le quatrième sur D .

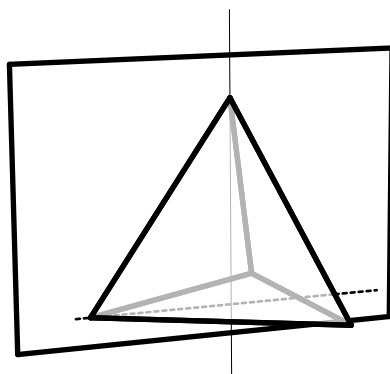
Pour démontrer ce dernier fait, on prouve dans un premier temps qu'une isométrie de l'espace conserve les barycentres. Cela signifie que si l'on appelle f l'isométrie, alors f envoie le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ sur le barycentre de $(f(A_1), a_1), \dots, (f(A_n), a_n)$. Admettons ce résultat facile.

Dans un second temps, on remarque que tout point de l'espace peut s'écrire comme un certain barycentre (*i.e.* avec des coefficients bien choisis) des quatre points A, B, C et D . Ainsi, si l'image par f des quatre sommets est fixée, il en est de même de l'image de tout point par la remarque précédente. Une permutation des sommets conduit donc à une certaine isométrie du plan totalement déterminée. De plus en réutilisant la propriété des barycentres, cette isométrie laisse stable tout le tétraèdre.

On a ainsi donné une description algébrique des isométries du tétraèdre : ce n'est autre que la donnée d'une permutation des sommets. Mais essayons de voir géométriquement cette isométrie. Nous allons simplement discuter le cas où la permutation associée admet un point fixe, par exemple le sommet A que l'on place en haut.

La face opposée à ce sommet est un triangle équilatéral qui, d'après ce que l'on a vu dans le paragraphe précédent, admet six transformations qui le laissent stable. Nous allons voir comment on peut étendre chacune de ces transformations à tout l'espace pour obtenir une transformation de l'espace donc qui laisse stable le tétraèdre.

Commençons par tracer la droite (Δ) qui passe par le sommet A et qui est perpendiculaire à la face opposée. À un axe de symétrie de cette face (par exemple celui qui passe par le centre du triangle équilatéral d'en bas et le point de gauche), on fait correspondre le plan porté par la droite en question et la droite (Δ) . Un tel plan est un plan de symétrie de la figure, comme le montre le dessin suivant :



En faisant de même avec les autres symétries, on obtient déjà trois isométries de l'espace qui laissent globalement invariant le tétraèdre. On peut faire une manipulation analogue pour les rotations : à une rotation plane laissant stable le triangle équilatéral du bas, on associe la rotation de l'espace de même angle et portée par la droite (Δ) ; elle laisse alors stable le tétraèdre.

Cela nous donne six isométries, ce sont précisément les six isométries qui correspondent aux six permutations des sommets B, C et D . On peut refaire le raisonnement pour chaque

face, obtenant ainsi $6 \times 4 = 24$ isométries, ce qui est le bon nombre. Hélas, en faisant cela, on obtient des répétitions : par exemple l'identité s'obtient pour chacune des faces, par exemple la symétrie représentée sur la figure précédente s'obtient lorsque l'on travaille avec la face du bas mais aussi lorsque l'on travaille avec celle de devant. Par voie de conséquence, il y a aussi des isométries que l'on n'obtient pas : ce sont exactement celles qui ne laissent aucun sommet fixe.

Mais peu importe. Demandons-nous plutôt si comme précédemment on peut écrire toutes les isométries du tétraèdre à partir de deux réflexions seulement. La réponse est négative... mais elle devient positive si on remplace « deux réflexions » par « trois réflexions »³. En guise d'exercice, nous vous invitons à trouver ces réflexions et à écrire chacune des isométries précédentes comme composée de ces réflexions. Nous donnons la réponse à la fin de la section suivante.

2 Description algébrique de ces isométries

Nous allons maintenant nous abstraire totalement du côté géométrique de la chose et décrire les transformations précédentes de façon purement syntaxique.

2.1 Le groupe diédral

On reprend ici le cas du polygone régulier à n côtés. On a vu précédemment que toutes les transformations qui le laissent stable pouvaient s'écrire comme la composée de deux symétries que l'on avait notées s et s' . À partir de maintenant, pour ne pas trop facilement confondre les lettres ni avoir à compter les « primes », on va poser $t = s'$.

Ainsi, on peut mettre temporairement de côté la géométrie et écrire les isométries du polygone régulier simplement comme une suite de lettres disons **S** et **T**. Plus exactement, lorsque l'on écrit :

S S T S T S T S S T T T S S S T S T

cela voudra dire que l'on pense à la transformation géométrique :

$s \circ s \circ t \circ s \circ t \circ s \circ t \circ s \circ s \circ t \circ t \circ t \circ s \circ s \circ s \circ t \circ s \circ t$

Les transformations géométriques deviennent ainsi des mots écrits avec les deux seules lettres **S** et **T**. Toutefois, cela n'est pas encore complètement satisfaisant : on a par exemple $s \circ s = t \circ t = \text{id}$ et donc la transformation précédente se simplifie considérablement pour donner au final juste l'identité. Le problème n'est pas tant que l'on a trouvé une écriture compliquée de l'identité. Il est surtout que l'on aimerait étant donnés deux mots savoir déterminer sans revenir à la géométrie s'ils correspondent ou non à la même isométrie. Bien sûr, il y a des règles évidentes que l'on peut déjà appliquer pour simplifier l'écriture : lorsque l'on voit deux **S** (ou deux **T**) successifs, on peut les barrer. Mais ensuite, cela répond-il à la question ? Est-ce vrai que pour comparer deux mots, il suffit de supprimer les doublons et regarder si les deux mots obtenus au final sont les mêmes ? Manifestement non, car dans le cas du pentagone par exemple, on peut vérifier que l'on a l'égalité :

$s \circ t \circ s \circ t \circ s = t \circ s \circ t \circ s \circ t$

³Bien sûr, cela est directement relié au fait que l'on travaille désormais en dimension 3.

et il est évident que les deux mots **STSTS** et **TSTST** ne peuvent se déduire l'un de l'autre par suppression de doublons, car aucun d'eux ne contient un quelconque doublon. On pourrait également admettre que l'on a en outre le droit de faire apparaître magiquement des doublons là où il n'y avait rien avant ; mais cela ne va pas suffire non plus et le même exemple est encore valable, comme il est peut-être un peu plus délicat cette fois-ci de le constater.

Il faut trouver autre chose. Cela dit, il y a une autre relation évidente que l'on a oubliée de mentionner, c'est $(s \circ t)^n = \text{id}$. Autrement dit, on a le droit de faire la transformation syntaxique suivante :

$$\underbrace{\text{ST ST} \dots \text{ST}}_{n \text{ fois}} \longrightarrow \varepsilon$$

ε désignant le mot vide, donc formé d'aucune lettre. Et c'est suffisant : l'ajout de cette règle suffit pour savoir si deux mots correspondent à la même transformation. De façon plus mathématique, on a le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit Ω un mot écrit dans l'alphabet formé des deux seules lettres S et T . À un tel mot, on associe comme précédemment, une isométrie du plan, notée ω . Alors, ω est l'identité si et seulement si le mot Ω peut se réduire sur le mot vide ε à l'aide des transformations suivantes :*

$$\begin{array}{l} \text{SS} \longleftrightarrow \varepsilon \\ \text{TT} \longleftrightarrow \varepsilon \\ \underbrace{\text{ST ST} \dots \text{ST}}_{n \text{ fois}} \longleftrightarrow \varepsilon \end{array}$$

les transformations pouvant se faire dans les deux sens⁴.

Avant de prouver ce théorème notons que cela résout aussi le problème de la comparaison de deux mots quelconques : pour comparer Ω et Ω' , il suffit de comparer le mot $\bar{\Omega}\Omega'$ au mot vide, $\bar{\Omega}$ désignant le mot Ω écrit à l'envers⁵. On peut également directement essayer d'obtenir Ω' à partir de Ω , cela revient au même comme il est facile de s'en convaincre.

Passons à la démonstration. Prenons un mot Ω dont la transformation ω associée est l'identité. Il nous faut prouver que l'on peut réduire Ω sur le mot vide ε *via* les transformations autorisées. Dans un premier temps, comme ω est l'identité, c'est en particulier une isométrie directe du plan. Ainsi si ω s'écrit comme la composée de réflexions, il y en aura forcément un nombre pair. Cela signifie que Ω a forcément un nombre pair de lettres.

En simplifiant les doublons qui apparaissent dans Ω et en tenant compte de la condition de parité acquise précédemment, on voit tout de suite que Ω se réduit forcément sur un mot de la forme $(\text{ST})^i$ ou $(\text{TS})^i$. Supposons, en premier lieu, que l'on soit dans le premier cas. On sait que la transformation géométrique $s \circ t$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et on sait maintenant en outre que $(s \circ t)^i = \text{id}$. Cela prouve que i est un multiple de n et donc d'après la troisième règle de simplification de $(\text{ST})^i$ se réduit sur le mot vide. C'est bien ce que l'on voulait.

⁴Cela signifie que l'on a le droit de faire apparaître par exemple la suite de lettres **SS** au milieu d'un mot. Si l'on préfère, on peut complexifier le mot pour pouvoir mieux le simplifier ensuite. Ce n'est pas franchement utile pour ce théorème mais cela risque de l'être pour la suite.

⁵Au fait, pourquoi ?

Pour le second cas, on montre de même que i doit être un multiple de n , et il ne reste plus qu'à expliquer comment on passe du mot $(TS)^n$ au mot vide. Cela se fait simplement avec la suite de transformations suivantes :

$$\underbrace{TSTS \dots TS}_{n \text{ fois}} \longrightarrow \underbrace{TSTS \dots TS}_{n \text{ fois}} TT = T \underbrace{STST \dots ST}_{n \text{ fois}} T \longrightarrow TT \longrightarrow \varepsilon$$

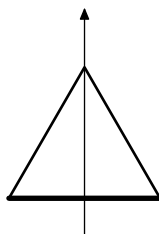
En conclusion, on a donné une description totalement algébrique de l'ensemble des isométries que l'on cherchait à décrire. Pour donner un peu de terminologie, on dit que l'on a donné ici une *présentation par générateurs et relations* du groupe des isométries du plan laissant stable un polygone régulier à n côtés, groupe que l'on appelle plus ou moins classiquement⁶ le groupe *diédral*, et que l'on note D_n .

2.2 Le groupe symétrique

Passons maintenant au tétraèdre ou encore plus ambitieusement à la généralisation « naturelle » du tétraèdre en dimension d . Déjà, il faut se représenter la dimension d ce qui n'est pas forcément facile et, en fait, il est à craindre que personne n'y arrive vraiment... il ne faut donc pas s'inquiéter si vous pensez avoir des problèmes. Un point dans l'espace de dimension d est un d -uplet de réels, réels correspondant bien entendu à ses coordonnées selon les d directions.

Avant d'essayer de comprendre le tétraèdre en dimension 4, essayons de comprendre quels sont ses équivalents en dimension 1 et 2. Les voici, livrés sur un plateau : en dimension 1, c'est simplement le segment et, en dimension 2, c'est le triangle équilatéral ! En fait, il y a une construction pour passer du « tétraèdre » de dimension d au « tétraèdre » de dimension $d + 1$.

Pour passer de la dimension 1 à la dimension 2 que fait-on ? On dessine un « tétraèdre » de dimension 1 (en l'occurrence un segment) et on considère dans le plan la direction perpendiculaire. On attrape le tétraèdre (enfin, le segment) au milieu et on le tire selon la perpendiculaire pour en faire un triangle (équilatéral) :



On est contraint de rajouter deux côtés, ou plus exactement deux « tétraèdres » de dimension 1 pour fermer la figure.

Pour passer à la dimension 3, on fait exactement pareil : on trace un triangle équilatéral sur notre feuille posée à plat puis on le tire vers le haut. Pour former finalement le vrai tétraèdre, il nous faut rajouter trois faces. Pour construire le « tétraèdre » de dimension 4, même recette. On prend un vrai tétraèdre, on pince son centre de gravité et on le tire selon la quatrième direction de l'espace... On complète alors la figure en collant quatre nouveaux vrais tétraèdres. Et ainsi de suite.

⁶En fait, il y a deux conventions : parfois on remplace n par $2n$, ceci étant pour rappeler qu'il y a $2n$ isométries dans ce groupe.

À partir de maintenant, on ne dira plus « tétraèdre » mais plutôt *simplexe régulier* de dimension d comme le font les gens instruits. Bien sûr, la définition précédente n'a rien de rigoureux ; si l'on souhaite définir correctement le simplexe régulier de dimension d , on peut procéder de la manière suivante. Dans l'espace de dimension $d+1$ (donc dans \mathbb{R}^{d+1}), on considère les points A_i de coordonnées $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le 1 se trouvant en i -ième position. L'« hypervolume » dont les sommets sont les A_i est par définition le simplexe régulier de dimension d . Vous pourrez vérifier que cela fonctionne bien pour $d = 1$ et $d = 2$... mais plus difficilement pour $d = 3$, car il faut alors faire un dessin dans \mathbb{R}^4 .

On veut maintenant déterminer les isométries de l'« espace » laissant fixe ce simplexe. Mais d'abord quel espace ? Dans quoi vit le simplexe ? La définition mathématique que l'on a donnée nous le livre dans \mathbb{R}^{d+1} . Cela est un peu embêtant car on préférerait un espace de dimension d , plutôt que $d+1$, le simplexe étant lui de dimension d . Qu'à cela ne tienne, on remarque que tous les sommets A_i précédents sont dans le « plan » (que l'on appelle alors hyperplan) d'équation $x_1 + \dots + x_d + x_{d+1} = 1$ qui lui est bien de dimension d . Voici donc l'espace ambiant dans lequel est plongé le simplexe régulier de dimension d .

On reprend maintenant mot pour mot la démonstration faite dans le cas du tétraèdre. On commence par remarquer qu'une isométrie de l'espace laissant stable le simplexe induit une *permutation* des sommets. On a besoin dans ce paragraphe de préciser un peu plus le sens du mot « permutation » : il s'agit d'une bijection de l'ensemble des sommets dans lui-même. Il est alors clair que toute transformation laissant stable le simplexe fournit une telle permutation simplement en restreignant la bijection de l'espace à l'ensemble fini des sommets du tétraèdre.

De même que dans le cas du tétraèdre, la donnée d'une telle permutation permet de reconstruire de façon unique une isométrie de l'espace. L'argument est encore le même : une telle isométrie conserve les barycentres et tout point de l'espace s'écrit (de façon unique) comme barycentre des A_i ⁷.

Ainsi si on n'arrive pas très bien à se représenter l'« hyperespace » de dimension d et les isométries du simplexe, on peut toujours se raccrocher à cette description algébrique simple et manipulable. Certes, nous avons une description algébrique mais ce n'est pas encore une présentation par générateurs et relations comme nous l'avons vue dans le paragraphe précédent ; l'obtenir est le but de la suite.

Avant cela, il faut souligner une compatibilité évidente mais essentielle : la composition des isométries est compatible avec celle des permutations, dans le sens où si f et g sont les permutations associées respectivement aux isométries F et G , alors la permutation associée à l'isométrie composée $G \circ F$ est $g \circ f$. C'est la raison pour laquelle il est légitime de regarder les briques élémentaires pour reconstruire les isométries simplement au niveau des permutations.

Parmi les permutations des $d+1$ sommets A_1, \dots, A_{d+1} , il y a celle qui échange les sommets A_i et A_j et fixe les autres. Cette permutation particulière est ce que l'on appelle une *transposition* et que l'on note plus ou moins classiquement $\tau_{i,j}$. Géométriquement, cette transposition correspond à la réflexion orthogonale par rapport au « plan » passant par le centre et les $d-1$ sommets qui ne bougent pas. Notons cette symétrie $s_{i,j}$.

Ces transpositions (une pour chaque couple (i, j)), comme nous allons le voir, suffisent à écrire n'importe quelle permutation. Seulement, il y a beaucoup de telles transpositions,

⁷En effet, le point de coordonnées (x_1, \dots, x_{d+1}) avec $x_1 + \dots + x_{d+1} = 1$ peut s'écrire comme le barycentre de $(A_1, x_1), \dots, (A_{d+1}, x_{d+1})$.

exactement $\frac{d(d-1)}{2}$, étant donné que les transpositions $\tau_{i,j}$ et $\tau_{j,i}$ sont les mêmes et que les transpositions $\tau_{i,i}$ sont invariablement l'identité. Comme pour le triangle équilatéral, nous avons montré que deux transpositions suffisaient et que nous avons annoncé que trois suffisaient pour le tétraèdre régulier, nous aimerions ne retenir que d transpositions (puisque l'on travaille en dimension d). Il faut en sélectionner certaines parmi les précédentes : on appelle, pour $1 \leq i \leq d$, τ_i la transposition $\tau_{i,i+1}$ et s_i la symétrie associée.

Montrons que toute permutation des sommets A_1, \dots, A_{d+1} peut s'écrire comme une composée des transpositions τ_i définies précédemment. Nous allons donner la façon de procéder sur un exemple. Supposons un instant $d = 7$, et donc que l'on a huit sommets à permuter. Prenons la permutation décrite par la ligne suivante :

$$A_2 \ ; \ A_8 \ ; \ A_3 \ ; \ A_6 \ ; \ A_4 \ ; \ A_7 \ ; \ A_1 \ ; \ A_5$$

Cette écriture signifie que la permutation que l'on considère envoie le premier sommet, en l'occurrence A_1 , sur A_2 , le second sommet sur A_8 et ainsi de suite.

On veut décomposer cette permutation en une suite de transpositions. Pour cela, on part de la permutation identité :

$$A_1 \ ; \ A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_8$$

et on veut parvenir à la permutation fixée précédemment en ne faisant que des échanges entre des sommets A_i et A_{i+1} . L'idée est de commencer par mettre le sommet A_1 en place. Pour cela, on a envie de le permuter avec A_7 , mais ce n'est pas possible directement puisque 1 et 7 ne sont pas consécutifs. La solution n'est pas bien difficile : on permute successivement A_7 avec les sommets $A_6, A_5, etc.$ jusqu'à arriver à A_1 . Le schéma suivant résume les différentes étapes :

$$\begin{array}{l}
 \tau_6 \left(\begin{array}{l} A_1 \ ; \ A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_8 \\ A_1 \ ; \ A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_7 \ ; \ A_6 \ ; \ A_8 \end{array} \right. \\
 \tau_5 \left(\begin{array}{l} A_1 \ ; \ A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_5 \ ; \ A_8 \\ A_1 \ ; \ A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_4 \ ; \ A_8 \end{array} \right. \\
 \tau_4 \left(\begin{array}{l} A_1 \ ; \ A_2 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_3 \ ; \ A_8 \\ A_1 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_2 \ ; \ A_8 \end{array} \right. \\
 \tau_3 \left(\begin{array}{l} A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_1 \ ; \ A_8 \end{array} \right. \\
 \tau_2 \left(\begin{array}{l} A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_1 \ ; \ A_8 \end{array} \right. \\
 \tau_1 \left(\begin{array}{l} A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ A_4 \ ; \ A_5 \ ; \ A_6 \ ; \ A_7 \ ; \ A_1 \ ; \ A_8 \end{array} \right.
 \end{array}$$

La méthode se poursuit en mettant en place A_2 puis A_3 et ainsi de suite jusqu'à obtenir la bonne suite de sommets. Il est important de remarquer que lors de la mise en place de A_i ($i \geq 2$), le sommet A_1 n'intervient plus. Ainsi, une fois A_1 mis en place, il ne bouge plus par la suite, ce qui assure que la méthode fonctionne bien.

On a finalement trouvé les générateurs, il ne reste plus qu'à donner les relations et prouver que ce sont les seules. Nous n'allons en fait pas donner cette preuve ; elle résultera de la théorie générale que nous présenterons dans la seconde partie. Essayons quand même de voir les relations que l'on a.

Déjà, lorsque l'on applique une transposition deux fois d'affilée, c'est comme si l'on ne faisait rien. Géométriquement, si on fait deux fois la même symétrie on retombe sur la figure de départ. On a donc la première relation :

$$\tau_i^2 = \text{id}$$

valable donc pour tout entier i compris entre 1 et n . Regardons maintenant ce qui se passe lorsque l'on compose τ_i et τ_j . On a, d'abord dans le cas où $j = i + 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \dots & A_i & ; & A_{i+1} & ; & A_{i+2} & \dots \\ \tau_i \left(& & & & & & & \\ & \dots & A_{i+1} & ; & A_i & ; & A_{i+2} & \dots \\ \tau_{i+1} \left(& & & & & & & \\ & \dots & A_{i+2} & ; & A_i & ; & A_{i+1} & \dots \end{array}$$

Cette permutation composée agit seulement sur trois éléments et les permute cycliquement. Lorsqu'on la fait trois fois d'affilée, on retombe sur l'identité, d'où la relation suivante :

$$(\tau_{i+1} \circ \tau_i)^3 = \text{id}$$

Si au contraire i et j sont tels que $|i - j| > 1$, alors τ_i et τ_j n'agissent pas sur les mêmes éléments et donc commutent, c'est-à-dire :

$$\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$$

Ce sont là les seules relations. Autrement dit, comme dans le paragraphe précédent, si on considère l'ensemble des mots écrits dans l'alphabet formé des lettres S_i pour i variant de 1 à d et que l'on autorise les transformations (réversibles) suivantes sur ces mots :

$$\begin{array}{lll} S_i S_i & \longleftrightarrow & \varepsilon \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq d \\ S_i S_{i+1} S_i S_{i+1} S_i S_{i+1} & \longleftrightarrow & \varepsilon \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq d - 1 \\ S_i S_j & \longleftrightarrow & S_j S_i \quad \text{si } |i - j| > 1 \end{array}$$

tout mot pouvant être ainsi formé correspond à une symétrie laissant stable le simplexe régulier de dimension d , toute symétrie pouvant être atteinte et un mot donnant lieu à l'isométrie identique si et seulement s'il est possible de le réduire sur le mot vide ε avec les lois de transformation précédentes.

3 La situation générale

On aimerait désormais généraliser la situation précédente à, disons, d'autres figures mathématiques. Mais il est difficile de donner un sens précis à ce terme, et ce n'est en fait pas ce qu'il faut faire. Si l'on veut qu'au final, l'ensemble des isométries qui stabilisent la figure soit engendré par un petit nombre de réflexions orthogonales, cela disqualifie d'office nombre de figures qui auraient tout pourtant pour se prévaloir de ce qualificatif hautement distinctif. Par exemple, toute figure qui admet une « symétrie de rotation » mais aucun axe de symétrie serait mise d'office sur la touche. Sans doute plus grave, le cercle également ne pourrait se prévaloir de ce qualificatif; en effet, le cercle admet beaucoup trop de symétries : toutes les droites passant par son centre sont axes de symétrie, toutes les rotations de centre ledit centre sont autant d'isométries stabilisant le cercle. Si l'on

a quelques vagues notions de dénombrabilité, on voit que l'on obtient ainsi un nombre indénombrable d'isométries. Or les mots que l'on peut écrire dans un alphabet fini forment toujours un ensemble dénombrable ; on ne pourra donc jamais associer une isométrie à chaque mot.

Il nous faut tenter une autre approche.

3.1 Groupes de Coxeter

Plutôt que de chercher à imposer des conditions sur la figure, on les impose directement sur l'ensemble des symétries, et on oublie presque par le fait le côté géométrique de la chose.

Que peut-on vouloir de cet ensemble de symétries ? Dans un premier temps, évidemment, on aimerait qu'il soit formé d'isométries de l'espace. Quel espace ? On choisit \mathbb{R}^d pour un certain entier d . En outre, on impose que toutes les isométries considérées fixent l'origine. Ce n'est pas une véritable hypothèse supplémentaire : dans les cas évoqués précédemment, il y avait toujours un tel point fixe, c'était le centre de gravité de la figure ; on peut supposer sans trop de problèmes qu'on place ce centre de gravité à l'origine du repère.

On aimerait aussi que si f et g sont deux symétries retenues, il en soit de même de la symétrie composée $g \circ f$. On impose également une condition sur le passage à l'inverse : si f est une isométrie retenue, il faut que l'isométrie réciproque f^{-1} soit aussi retenue. Un ensemble vérifiant ces propriétés est ce que l'on nomme un *sous-groupe de $O(d)$* . Peu importe la terminologie.

On n'a pas beaucoup avancé en fait. Les problèmes précédents se posent toujours. Rien ne dit qu'il y aura une symétrie dans le sous-groupe retenu et rien ne dit qu'il n'est pas trop gros. Mais désormais, il est facile de résoudre ces détails (peut-être de façon malhonnête, pourrait-on penser) : on impose que le sous-groupe soit fini et engendré par des réflexions.

Autant si la première condition ne semble pas absurde, la seconde semble très forte ; c'est presque exactement ce que l'on veut au final. En réalité, pas exactement : on veut plutôt arriver à une présentation dudit sous-groupe par générateurs et relations et avoir moins de d générateurs... ce qui est quand même bien plus fort. Si l'on reprend l'exemple du pentagone régulier, il était en fait facile de voir que toutes les isométries pouvaient s'écrire comme composée de symétries : pour les symétries c'est une évidence, et pour les rotations, il suffisait de choisir deux symétries dont les axes étaient correctement espacés.

Cessons de débattre, ce sont, de toute façon, les hypothèses que nous allons retenir et qui sont retenues classiquement. En résumé, on a la définition suivante :

Définition 1. Un *groupe de Coxeter* est un sous-groupe fini de $O(d)$ engendré par des réflexions.

Il convient pour finir de faire une remarque sur ce que l'on appelle « réflexion » lorsque l'on est en dimension d quelconque. En dimension 2, c'est évidemment une symétrie axiale. En dimension 3, c'est une symétrie orthogonale⁸ par rapport à un plan. En dimension d , c'est une symétrie (orthogonale) par rapport à un sous-espace de dimension directement inférieure. Si on appelle x_1, \dots, x_d les coordonnées dans un tel espace, un tel sous-espace est toujours défini par une équation de la forme $a_1x_1 + \dots + a_dx_d = 0$ (la constante nulle

⁸Notez que la condition d'orthogonalité est obligatoire puisque l'on impose depuis toujours que l'on a affaire à des isométries.

provient du fait que l'on a supposé que toute isométrie choisie doit fixer l'origine). Un sous-espace de cette forme est ce que l'on appelle dans le cas général un *hyperplan*.

On peut interpréter, comme pour les petites dimensions, l'équation définissant l'hyperplan par un produit scalaire. Le point M de l'espace de dimension d appartient à l'hyperplan si le vecteur \overrightarrow{OM} est orthogonal au vecteur \vec{u} de coordonnées (a_1, \dots, a_d) . Autrement dit, cet hyperplan n'est autre que l'hyperplan orthogonal au vecteur \vec{u} et passant par l'origine.

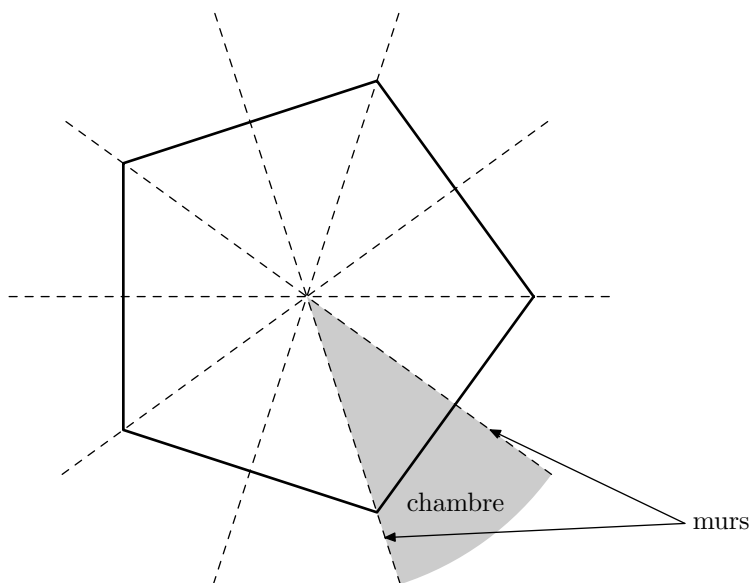
3.2 Murs et chambres

On se donne dans toute la suite un groupe de Coxeter que l'on appelle W . On cherche en premier lieu à redonner une interprétation géométrique à W .

On sait déjà que W est formé d'isométries de l'espace \mathbb{R}^d et même que les réflexions jouent un rôle important. On considère donc toutes les réflexions de W et plus précisément les hyperplans définissant ces réflexions. Un tel hyperplan est appelé un *mur*.

Les murs découpent l'espace en blocs⁹ appelés *chambres*. Une chambre est donc une partie de l'espace délimitée par des murs et aucun mur n'a le droit de traverser une chambre. Par convention, les murs ne font pas partie de la chambre.

Reprenons l'exemple du pentagone régulier. Les murs sont dans ce cas les droites reliant le centre du pentagone, disons O , à chacun des sommets (ces droites sont effectivement les axes de symétrie du pentagone), et les chambres sont les secteurs angulaires que délimitent ces droites. On peut représenter les choses par le dessin suivant :



On aimerait maintenant définir quels sont les murs d'une chambre donnée. Par exemple, de façon évidente, les murs de la chambre coloriée sur le dessin précédent sont les deux qui sont pointés par des flèches. Ce n'est en fait pas si simple de donner une définition rigoureuse et implacable : le mieux est sans doute de dire qu'un mur H borde une chambre

⁹C'est ce que l'on appelle traditionnellement les *composantes connexes* (du complémentaire des murs). Formellement deux points x et y n'appartenant à aucun mur seront dans la même composante connexe s'il existe un chemin continu reliant x à y et ne traversant aucun mur. Dans la situation considérée ici, deux points A et B n'appartenant à aucun mur sont dans la même chambre si, et seulement si le segment $[AB]$ ne rencontre aucun mur.

si celle-ci s'agrandit lorsque l'on abat H . Ceci a bien un sens précis, puisqu'étant donné un ensemble de murs on sait définir les chambres qu'ils délimitent.

La définition communément admise n'est pas celle-ci. Elle fait intervenir des notions de topologie différentes. Précisément, on dit que le mur H borde la chambre C si l'intersection de H avec l'adhérence de C est d'intérieur non vide dans H . Peu importe que vous compreniez ou non le sens précis de la phrase précédente ; nous n'allons de toute façon jamais utiliser cette définition.

Une propriété que l'on peut d'ores et déjà montrer est la suivante :

Propriété 1. *En dimension d , une chambre est délimitée par au plus d murs.*

Si l'on réfléchit un peu et que l'on se souvient que tout mur doit passer par l'origine, cette propriété devient fort naturelle. En tout cas, elle est évidente pour la dimension 2, car une chambre est forcément un secteur angulaire s'appuyant sur l'origine : elle ne peut donc admettre plus de deux murs. Elle pourrait par contre en admettre un seul.

Faisons la preuve dans le cas général. L'idée directrice consiste à remarquer que l'angle formé par deux murs d'une même chambre est toujours aigu (ou à la limite droit). Si l'on voit bien ce que peut-être cet angle en dimension 2, voire en dimension 3, il s'agit de donner une définition générale valable pour toute dimension. En réalité, la dimension d ou la dimension 2, c'est la même chose. Pourquoi ? Parce que si l'on intersecte deux murs, on obtient un espace de dimension $d-2$ et tout se passe dans le plan perpendiculaire. Donnons toutefois une définition rigoureuse que nous allons devoir utiliser.

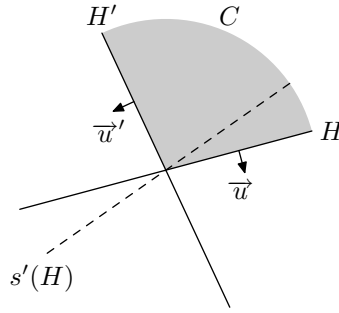
Comme nous l'avons déjà expliqué, un hyperplan est simplement défini par un vecteur orthogonal. Plus précisément si on se donne un vecteur \vec{u} , on peut regarder l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = 0$ (où « \cdot » désigne le produit scalaire), c'est un hyperplan et tout hyperplan s'obtient ainsi. Toutefois le vecteur \vec{u} définissant un hyperplan donné n'est pas unique ; il est défini à la multiplication par un réel près. On peut choisir si l'on veut de prendre un vecteur unitaire pour \vec{u} , mais il reste encore deux choix et l'on aura du mal à en privilégier un dans le cas général.

Toutefois ici, la situation est plus favorable : on n'a pas seulement un hyperplan mais également une chambre. La chambre se situe d'un des deux côtés de l'hyperplan. On a donc un moyen de choisir parmi les deux vecteurs précédents : on peut prendre soit celui qui rentre dans la chambre, soit celui qui en sort. Formellement, on peut poser la définition suivante :

Définition 2. Soient C une chambre et H un mur de C . Un *vecteur sortant* définissant H est un vecteur \vec{u} unitaire tel que :

1. $H = \left\{ M \in \mathbb{R}^d / \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = 0 \right\}$
2. $\forall M \in C, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} < 0$

Si H et H' sont deux murs de la chambre C , on considère \vec{u} et \vec{u}' les vecteurs sortants définissant ces deux hyperplans. L'angle que font ces deux vecteurs est par définition supplémentaire à l'angle que font les deux murs H et H' de la chambre C . Dire que cet angle est aigu (ou à la limite droit) signifie exactement que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ est négatif ou nul. La figure suivante illustre ce propos.



Cette figure explique même pourquoi il est impossible aux vecteurs \vec{u} et \vec{u}' de former un angle aigu, et donc aux murs H et H' de former un angle obtus. Supposons que ce soit le cas comme cela est représenté sur la figure et appelons s' la réflexion d'hyperplan H , élément de W . Admettons alors temporairement que l'hyperplan $s'(H)$ est également un mur. Cela conclura car si l'angle formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' est aigu, ce mur devra traverser la chambre C , ce qui est exclu.

Pourquoi donc $s'(H)$ est-il encore un mur ? Il s'agit de se rappeler le premier fait que l'on avait énoncé et qui parlait de conjugaison. Nous allons désormais énoncer un fait similaire qui permettra de résoudre notre question :

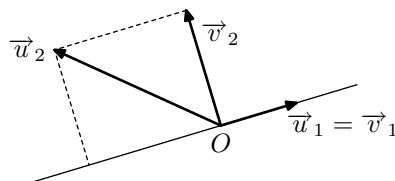
Fait 2 (Conjugaison). *La composée de la symétrie par rapport à l'hyperplan H' , de la symétrie par rapport à l'hyperplan H puis à nouveau la première symétrie s'identifie à la symétrie par rapport à l'hyperplan $s'(H)$.*

Ce fait prouve que la symétrie par rapport à l'hyperplan $s'(H)$ s'écrit comme la composée $s' \circ s \circ s'$ où s désigne naturellement la symétrie par rapport à H . Ainsi cette symétrie est un élément du groupe de Coxeter W et donc son hyperplan associé, en l'occurrence $s'(H)$, est un mur. Cela clôt notre premier résultat intermédiaire : l'angle formé entre deux murs d'une même chambre C est toujours aigu (ou à la limite droit).

Rappelons le résultat que l'on voulait démontrer : une chambre ne peut avoir strictement plus de d murs. Soit une chambre C . On regarde l'ensemble de ses murs : H_1, \dots, H_m et on suppose en outre que $m > d$. Pour chacun des murs H_i , on considère son vecteur unitaire sortant, disons \vec{u}_i . On a alors les relations :

1. $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \leq 0$ dès que $i \neq j$
2. pour tout $M \in C$ et pour tout i , $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_i < 0$.

Tout ce qui précède suffit à obtenir une contradiction. Pour la trouver, nous allons faire une construction classique appelée l'*orthonormalisation de Schmidt* : on modifie quelque peu les vecteurs \vec{u}_i pour les rendre orthogonaux deux à deux. Précisément, on définit par récurrence une nouvelle famille de vecteurs \vec{v}_i : on pose $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ et pour obtenir \vec{v}_{i+1} , on projette (orthogonalement) \vec{u}_{i+1} sur le sous-espace engendré par les \vec{v}_j pour $j \leq i$ et on retire à \vec{v}_{i+1} la valeur de cette projection. Voici un petit schéma qui explique la construction de \vec{v}_2 .



À chaque étape de la construction, la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i$ augmente d'au plus 1. Cependant lorsque $i = d + 1$, elle ne peut pas faire plus que d puisque l'espace ambiant est lui-même de dimension d , cela veut donc dire qu'à un moment la dimension n'a pas augmenté, ou si l'on préfère qu'il existe un entier k , tel que le vecteur \vec{v}_{k+1} appartient à l'espace engendré par les premiers vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. On constate sans mal que cela signifie que le vecteur \vec{u}_{k+1} appartient lui aussi à ce même espace et donc finalement $\vec{v}_{k+1} = \vec{0}$. De plus, on peut donner une formule explicite pour le calcul de \vec{v}_{i+1} quand $i \leq k$, c'est :

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{u}_{i+1} - \sum_{s=1}^i \frac{\vec{v}_s \cdot \vec{u}_{i+1}}{\|\vec{v}_s\|^2} \vec{v}_s$$

En particulier, par une récurrence facile, il vient :

$$\vec{0} = \vec{v}_{k+1} = \vec{u}_{k+1} + \sum_{s=1}^k \lambda_s \vec{u}_s$$

où les λ_s sont des réels positifs, ceci résultant bien sûr de la première condition sur les produits scalaires. En posant $\lambda_{k+1} = 1$ (qui est strictement positif), on obtient donc :

$$\sum_{s=1}^{k+1} \lambda_s \vec{u}_s = \vec{0}$$

Or si M est un point de la chambre C , le produit scalaire :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \left(\sum_{s=1}^{k+1} \lambda_s \vec{u}_s \right)$$

s'écrit comme une somme de termes négatifs et donc est strictement négatif, d'une part, mais, d'autre part, ce produit scalaire est nul car le deuxième vecteur du produit est lui-même déjà nul. Voici la contradiction.

En conclusion, on a bien prouvé notre proposition : en dimension d , une chambre est délimitée par au plus d murs. Attention, il peut très bien y avoir moins de d murs et même dès la dimension 2 comme nous l'avons déjà mentionné.

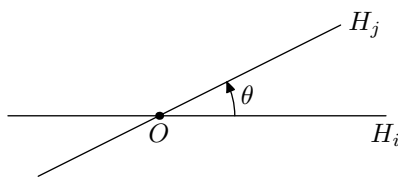
3.3 Une description combinatoire

On considère toujours un groupe de Coxeter W . On fixe désormais et jusqu'à la fin de cet exposé une chambre C . On appelle H_1, \dots, H_m les murs délimitant cette chambre et s_1, \dots, s_m les réflexions associées à ces murs.

Le théorème principal affirme que les m réflexions s_1, \dots, s_m suffisent à engendrer le groupe W . Autrement dit, tout élément $w \in W$ peut s'écrire comme une composée n'utilisant que ces réflexions. Comme on vient de voir que l'on avait forcément $m \leq d$, on obtient bien la majoration voulue par la dimension. En outre, il est possible de décrire un « système de relations » vérifiées par ces éléments.

Déjà, pour tout i , s_i est une réflexion, donc on a forcément $s_i^2 = \text{id}$. Si $i \neq j$, les symétries s_i et s_j fixent par hypothèse les hyperplans respectifs H_i et H_j et donc fixent toutes les deux l'intersection $H_i \cap H_j$, espace qui est de dimension $d - 2$. Considérons maintenant un plan¹⁰ perpendiculaire à cet espace. Le dessin suivant résume la situation dans ce plan :

¹⁰Un vrai plan, de dimension 2 !



Connaître la restriction des symétries s_i, s_j à ce plan suffit à les décrire complètement, ainsi que leurs composées. Pour se forger une intuition, on pourra essayer d'imaginer la situation en dimension 3 : l'intersection des deux hyperplans (qui sont alors des plans) est une droite, donc bien de dimension 1 ; cette droite est fixe et les symétries s_i et s_j (et donc leurs composées) sont totalement décrites par leur expression dans un plan perpendiculaire à la droite en question.

La situation dans ce plan est celle du polynôme régulier à n côtés pour un certain n ou si l'on préfère celle du groupe diédral D_n . L'entier n est fixé par l'angle θ *via* la relation $\theta = \pm \frac{\pi}{n}$, du moins lorsque θ est choisi entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Si l'on compose les symétries s_i et s_j dans cet ordre, on obtient une rotation d'angle 2θ qui vérifiera la relation $(s_j \circ s_i)^n = \text{id}$.

Si vous n'êtes pas satisfait par ce qui précède, vous pouvez simplement vous dire, puisque le groupe W est fini, qu'il existe forcément un entier k strictement positif tel que $(s_j \circ s_i)^k = \text{id}$ et que l'on choisit pour n le plus petit d'entre eux.

Nous allons à partir de maintenant appeler $n_{i,j}$ le nombre n défini précédemment. En résumé, les symétries retenues vérifient les relations :

$$\begin{aligned} s_i^2 &= \text{id} \quad \text{pour tout } i \\ (s_j \circ s_i)^{n_{i,j}} &= \text{id} \quad \text{pour tout } i \neq j \end{aligned}$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(s_j \circ s_i)^{n_{i,j}} = \text{id}$$

relation valable pour tous i et j , si l'on prend soin de poser $n_{i,i} = 1$ pour tout i .

Ces relations sont les « seules », ce qui est l'objet du théorème principal que l'on énonce clairement tout de suite :

Théorème 2. *On reprend les notations précédentes. On considère l'ensemble des mots écrits dans l'alphabet ayant pour lettres les S_i, i variant de 1 à m . À un tel mot, il correspond un unique élément du groupe de Coxeter W , obtenu simplement en substituant à la lettre S_i la réflexion s_i .*

Alors, d'une part, tout élément de W peut être obtenu à partir d'un certain mot et, d'autre part, si un mot Ω correspond à l'isométrie identique de W , alors on peut passer de Ω au mot vide ε avec les transformations suivantes :

$$\underbrace{S_j S_i \dots S_j S_i}_{n_{i,j} \text{ fois}} \longleftrightarrow \varepsilon$$

transformations pouvant se faire dans les deux sens.

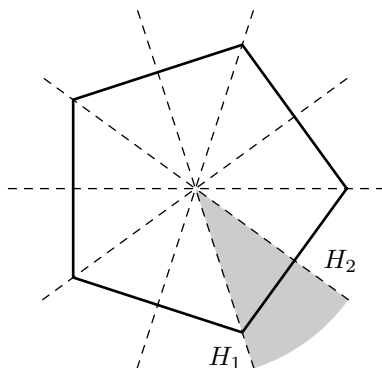
Finalement, le groupe de Coxeter W est simplement décrit par l'ensemble des nombres $n_{i,j}$. Ces nombres vérifient en outre des relations évidentes : on a toujours $n_{i,i} = 1$ et également $n_{i,j} = n_{j,i}$. On présente classiquement ces nombres dans un tableau carré ¹¹ que l'on appelle une *matrice*. Les propriétés précédentes affirment que la matrice est symétrique et n'admet que des 1 sur la diagonale.

¹¹On place le nombre $n_{i,j}$ à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne.

3.4 Revisitons nos premiers exemples

Le polygone régulier à n côtés

Le groupe de Coxeter est ici le groupe diédral D_n . On a déjà dessiné les murs et les chambres pour le cas particulier du pentagone. Rappelons que l'on avait obtenu :



La chambre grisée est bordée par deux murs, disons H_1 et H_2 . Appelons s_1 et s_2 les symétries dont les axes sont les deux murs précédents. Les entiers $n_{1,1}$ et $n_{2,2}$ valent évidemment tous les deux 1, et de plus $n_{1,2} = n_{2,1} = n$. Ainsi la matrice associée au groupe diédral D_n est simplement :

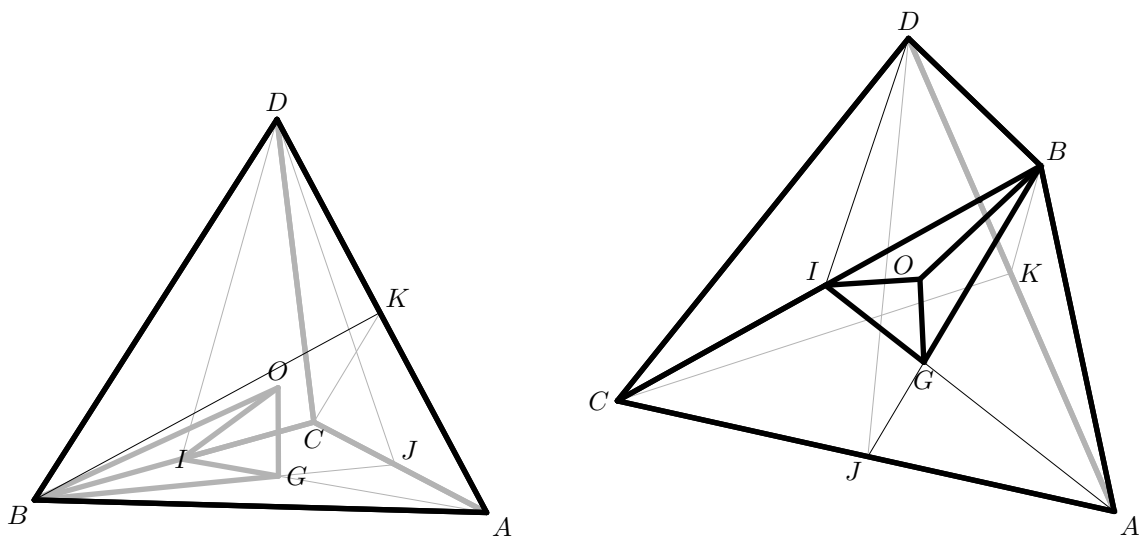
$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

Le théorème principal énoncé dans le paragraphe précédent fournit dans ce cas particulier directement le théorème 1 que l'on avait prouvé de manière directe dans le paragraphe 2.1.

Le tétraèdre

Nous avons déjà expliqué pourquoi les isométries laissant stable le tétraèdre correspondent exactement aux permutations des quatre sommets du tétraèdre, et pourquoi dans cette correspondance, les réflexions, c'est-à-dire les symétries par rapport à des plans, correspondent aux transpositions.

Il y a six façons de choisir deux sommets parmi les quatre du tétraèdre, et à chacune de ces six façons correspond un mur. Par exemple si l'on choisit les sommets A et B , on est amené à considérer la transposition qui échange ces deux sommets, puis la réflexion qui échange A et B tout en laissant fixes C et D ; c'est la réflexion par rapport au plan passant par les points C , D et le milieu du segment $[AB]$. On trace les six plans que l'on obtient ainsi et on essaie de reconnaître les chambres. Ce n'est pas forcément facile... mais en assemblant des papiers de *Vache qui rit*, des pièces de *mécano* et quelques boulons comme il convient, vous arriverez peut-être à voir qu'une chambre ressemble à :



Les deux dessins précédents sont deux représentations vues sous deux angles différents de la même figure 3D. Remarquez qu'il s'agit dans les deux cas d'un tétraèdre dont un morceau, en l'occurrence une chambre, a été retiré. En particulier, la représentation de droite peut être trompeuse, mais l'objet représenté est creux et non bossu. La chambre, donc, est l'intérieur d'un cône qui s'appuie sur le centre O du tétraèdre. Ce cône est ensuite dirigé par les trois demi-droites $[OI)$, $[OG)$ et $[OB)$. Les murs de cette chambre sont les trois plans (ADI) , (BDJ) et (BCK) . Si l'on numérote les sommets correctement, on s'aperçoit en outre¹² que les plans qui délimitent la chambre correspondent aux symétries puis aux transpositions τ_i que l'on avait définies dans le paragraphe 2.2.

Ainsi le résultat annoncé à la fin de ce même paragraphe s'interprète encore comme un cas particulier du théorème général. Pour être complet, il ne reste plus qu'à donner la matrice associée au tétraèdre. Nous avons en fait déjà vu que $(\tau_{i+1} \circ \tau_i)^3 = \text{id}$ et que 3 est le plus petit exposant qui convient ; le coefficient $n_{i,i+1}$ vaut donc 3. Si maintenant $|i - j| > 1$, on voit directement que la permutation $\tau_j \circ \tau_i$ devient identique lorsqu'on l'élève au carré ; cela prouve que dans ce cas $n_{i,j} = 2$. Finalement la matrice cherchée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut sans difficulté supplémentaire généraliser à la dimension n , et obtenir la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & & & & \\ 2 & & & & 2 \\ \vdots & & & & 3 \\ 2 & \dots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5 Quelques idées de preuve

Avec les notations du paragraphe 3.3, il faut d'abord prouver que les réflexions s_1, \dots, s_m engendrent tout le groupe W . Comme par hypothèse, le groupe W est engendré par des

¹²Ô ! miracle.

réflexions, il suffit de prouver que toute réflexion de W peut s'écrire comme une composée des isométries s_1, \dots, s_m .

Soient $s \in W$ une réflexion et H son hyperplan. Bien sûr si H est un mur de la chambre C , il n'y a rien à faire puisque s est déjà l'un des s_i . Maintenant, si H est un mur d'une chambre C' adjacente à C (*i.e.* ayant une cloison¹³ commune), on raisonne comme suit : on appelle T la cloison et t la réflexion qui lui est associée. Par conjugaison, l'isométrie $t \circ s \circ t$ est la réflexion d'hyperplan $t(H)$ qui est un mur de C . En faisant passer les t de l'autre côté, on obtient une relation comme on le souhaitait.

La suite est naturelle maintenant : tous les murs d'une chambre adjacente à une chambre adjacente à C correspondent à des réflexions que l'on sait écrire comme composées des s_i , et de même par suite pour les chambres adjacentes aux chambres adjacentes aux chambres adjacentes à C . On espère ainsi que l'on pourra propager la propriété à toutes les chambres. Il ne reste qu'à prouver que si C et C' sont deux chambres, alors il existe un chemin $C = C_0, C_1, \dots, C_k = C'$ tel que les chambres C_i et C_{i+1} soient toujours adjacentes. Pour construire ce chemin on choisit un point M dans C , un point M' dans C' , le tout de telle façon que le segment $[MM']$ traverse les murs franchement (*i.e.* ne passe jamais par un point qui se trouve à l'intersection de deux murs¹⁴) ; on suit alors le segment et on regarde quelles chambres il traverse successivement ; le chemin est obtenu ainsi.

On a ainsi donné les principales idées de la démonstration de la première partie du théorème : tout élément de W peut s'obtenir à partir d'un mot écrit avec les lettres S_i . Il s'agit de prouver maintenant la seconde partie : on se donne un mot, on suppose que l'élément de W qui lui est associé est l'identité et on souhaite expliquer comment on peut transformer le mot en le mot vide simplement en utilisant les opérations suivantes :

$$\underbrace{S_j S_i \dots S_j S_i}_{n_{i,j} \text{ fois}} \longleftrightarrow \varepsilon$$

Supposons que le mot que nous nous sommes donné est :

$$\Omega = T_1 T_2 T_3 \dots T_{n-1} T_n$$

où chacune des lettres T_j est l'une des lettres S_i de notre alphabet. Appelons t_j la réflexion associée à la lettre T_j . Comme par hypothèse l'isométrie associée au mot Ω est l'identité, on a :

$$t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ \dots \circ t_{n-1} \circ t_n = \text{id}$$

Choisissons un point M dans la chambre C et définissons pour tout entier i compris entre 1 et n :

$$M_i = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_i (M)$$

et posons par convention $M_0 = M$. Notons également C_i la chambre dans laquelle loge le point M_i . On a donc $C_0 = C$. On remarque judicieusement que M_{i+1} se déduit de M_i , *via* la formule :

$$M_{i+1} = (t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_i) \circ t_{i+1} \circ (t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_i)^{-1} (M_i)$$

¹³Il faut faire attention à la définition de *cloison* : en particulier définir une cloison comme un mur commun n'est pas bon, car on pourrait avoir affaire à deux morceaux « éloignés » du même mur. Bref, on peut dire que C et C' ont une cloison commune s'il existe un segment reliant un point de C à un point de C' traversant un *unique* mur, donc à un endroit où il n'intersecte pas un autre mur.

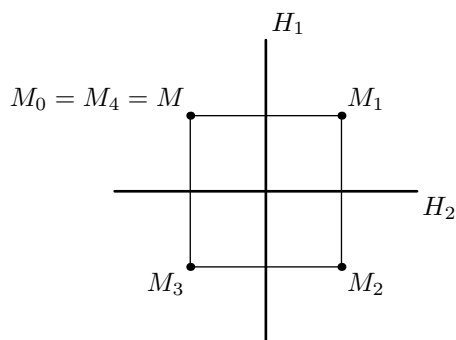
¹⁴Pourquoi est-ce possible au fait ?

et on reconnaît là une conjugaison : M_{i+1} est l'image de M_i par la symétrie d'axe $t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_i (T_{i+1})$, T_{i+1} désignant l'hyperplan de la réflexion t_{i+1} . De plus, on montre facilement par récurrence que l'hyperplan T_{i+1} est un mur de la chambre C_i et c'est même en fait une cloison commune aux chambres C_i et C_{i+1} . Finalement, on construit une suite de chambres chacune adjacente à la suivante, et qui d'une certaine façon suit le mot Ω . Précisément pour tout i , le segment $[M_i M_{i+1}]$ passe de la chambre C_i à la chambre C_{i+1} en ne traversant que le mur T_{i+1} .

Par hypothèse $t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n = \text{id}$ et donc $M_n = M$. On construit de cette façon un chemin fermé (ce que l'on appelle un *lacet*) qui est en quelque sorte la mémoire du mot Ω . Nous entendons par là qu'à partir du lacet, on peut retrouver le mot Ω sans problème : il suffit de regarder les murs que l'on traverse et déterminer en faisant la manipulation inverse de la précédente quelle est la lettre à rajouter dans le mot.

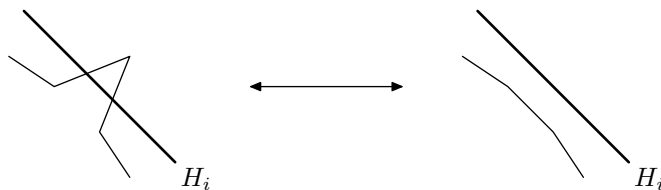
L'idée consiste alors à déformer (continûment) le lacet, pour qu'il devienne au final un unique point et de suivre, au cours de la déformation, l'évolution du mot associé. Si le lacet devient un point au final, il ne traverse plus aucun mur, et donc le mot associé est le mot vide ε . Ainsi, si on prouve que l'évolution du mot suit les règles de transformation données, le théorème sera démontré.

Pour cela, il est important de faire attention à la manière dont on déforme le lacet. On aimerait ne pas trop modifier le mot en même temps, et, de fait, ne jamais passer par exemple par l'intersection de deux murs. Mais on ne peut pas imposer cette condition, le petit dessin suivant en dimension 2 devrait vous en convaincre définitivement :



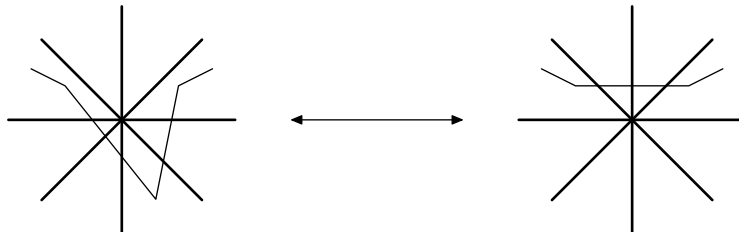
Ce qu'il est toujours possible de faire par contre, c'est éviter de passer par les « vraies » intersections de trois murs, « vraies » signifiant que l'on ne considère que les intersections de trois murs qui ne peuvent s'écrire comme intersection de deux murs. Nous allons admettre ce résultat¹⁵, non pas qu'il soit si compliqué finalement.

Regardons, forts de cette nouvelle hypothèse, l'évolution du lacet. Soit il traverse toujours exactement les mêmes murs dans le même ordre et, dans le cas, le mot associé au lacet ne change pas. Soit un seul mur traversé disparaît ou apparaît et, dans ce cas, la situation est celle du dessin suivant :



¹⁵Comme il a d'ailleurs été admis pendant l'exposé.

Cela correspond à la transformation autorisée $\mathbf{S}_i\mathbf{S}_i \leftrightarrow \varepsilon$. Soit, et c'est la dernière possibilité, le lacet passe par une intersection de deux murs. Dans le cas où quatre murs concourent à cette intersection, la situation est illustrée par la figure suivante :



(Noter qu'ici, une fois de plus, tout se passe dans le *plan* orthogonal à l'intersection des deux murs en question). Sur cet exemple, le mot subit la transformation $\mathbf{S}_j\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j\mathbf{S}_i \leftrightarrow \mathbf{S}_i\mathbf{S}_j\mathbf{S}_i$ et $n_{i,j} = 4$. Il s'agit bien d'une transformation licite comme le lecteur pourra le démontrer lui-même. Le cas général (par exemple lorsque plus de quatre murs concourent à l'intersection) se traite de manière tout à fait similaire. Le théorème est enfin démontré.

Faisons pour finir une dernière remarque. La démonstration précédente donne gratuitement une autre propriété très intéressante. Pour prouver que le mot se réduisait au mot vide, on n'a en fait pas véritablement utilisé que :

$$\omega = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_{n-1} \circ t_n$$

était l'isométrie identique, mais simplement qu'elle envoyait la chambre C sur elle-même. En réalité, on a prouvé que si un élément $w \in W$ est tel que $w(C) = C$, alors w est forcément l'identité.

On sait en outre que pour toute chambre C' , il existe un $w \in W$ tel que $w(C) = C'$. Et d'après ce que l'on vient de dire un tel w est unique, car si $w(C) = w'(C) = C'$, on aurait $w' \circ w^{-1}(C) = C$ et donc $w' \circ w^{-1} = \text{id}$ puis $w = w'$. Il y a donc une bijection entre les éléments de W et l'ensemble des chambres. En particulier, ces deux ensembles ont même cardinal, ce qui n'était pas du tout évident *a priori*.

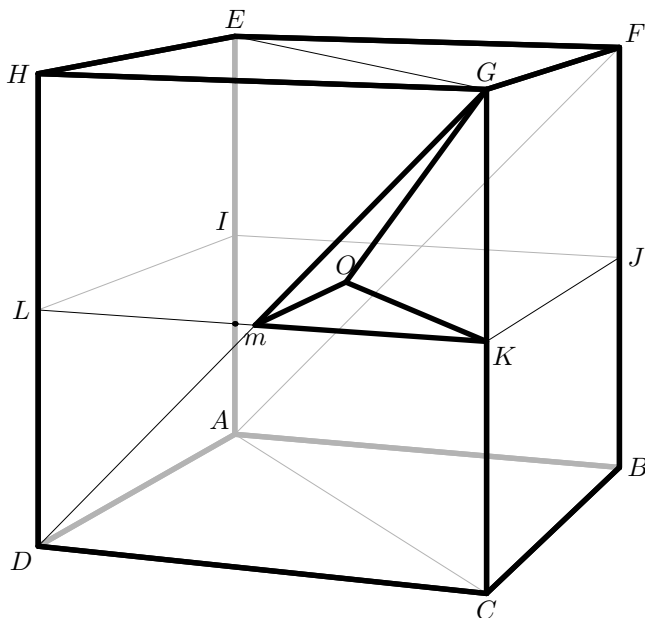
Annexe : Le cas du cube

Dans cette annexe, nous appliquons ce qui précède pour déterminer algébriquement le groupe des isométries de l'espace stabilisant un cube. Appelons A, B, C, D, E, F, G et H les sommets du cube et O son centre de gravité. Supposons de plus que l'espace est muni d'un repère d'origine O pour lequel les sommets du cube ont pour coordonnées respectives :

$$\begin{array}{cccc} A(-a, -a, -a) & B(-a, a, -a) & C(a, a, -a) & D(a, -a, -a) \\ E(-a, -a, a) & F(-a, a, a) & G(a, a, a) & H(a, -a, a) \end{array}$$

Déterminons dans un premier temps le cardinal du groupe que l'on cherche à décrire. Il n'est en fait pas difficile de se convaincre qu'une isométrie de l'espace qui stabilise le cube doit forcément s'écrire sous la forme $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\varepsilon_1 x_{\sigma(1)}, \varepsilon_2 x_{\sigma(2)}, \varepsilon_3 x_{\sigma(3)})$, où les ε_i sont des signes (*i.e.* des nombres égaux soit à 1 soit à -1) et où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Cette remarque permet d'accéder directement au cardinal du groupe¹⁶ : on a $6 = 3!$ choix pour la permutation et 2 choix pour chaque signe ; ça fait donc $3! \times 2^3 = 48$ éléments.

On ne sait pas à ce stade si le groupe des isométries du cube est un groupe de Coxeter. Il est certes fini, mais rien ne nous dit qu'il est engendré par des réflexions et nous allons utiliser une ruse pour le prouver. Appelons W l'ensemble des isométries laissant stable le cube qui peuvent s'écrire comme composée de réflexions (laissant stable le cube aussi, bien entendu). Cet ensemble est lui, un groupe de Coxeter. En outre, à l'intérieur de ce groupe, on a la réflexion de plan $(IJKL)$ ¹⁷, celle de plan $(EGCA)$ et celle de plan $(DAFG)$ comme on le voit mieux si l'on regarde le dessin suivant :



Ce même dessin met également en évidence la partie que délimitent ces trois murs, exactement le cône de sommet O dirigé par les demi-droites $[OG)$, $[OK)$ et $[Om)$ ¹⁸ ; ce

¹⁶En fait, elle suffit déjà à donner une description tout à fait acceptable de notre groupe, mais continuons plutôt à appliquer la théorie de Coxeter.

¹⁷ I est le milieu de $[AE]$, J celui de $[BF]$, K celui de $[CG]$ et L celui de $[DH]$.

¹⁸ m est le milieu de $[KL]$.

n'est peut-être pas une chambre, c'est en tout cas une union de chambres. Un calcul simple prouve en outre que ce cône occupe (en volume) un quarante-huitième de l'espace.

Et 48 est aussi le nombre d'éléments du groupe des isométries du cube ; ce n'est pas un hasard. Plus exactement, notons V le volume de l'intersection d'une chambre avec le cube ; ce volume ne dépend pas de la chambre choisie car on peut toujours passer d'une chambre à une autre par une isométrie de l'espace qui stabilise le cube. Notons x le nombre de chambres contenues dans le cône $OmKG$. Comme il y a exactement $y = \text{Card } W$ chambres, on arrive à :

$$\begin{aligned} x \cdot V &= \frac{a^3}{6} \\ y \cdot V &\leq 8a^3 \end{aligned}$$

En outre $y \leq 48$, puisque W est constitué d'isométries de l'espace qui stabilisent le cube et qu'il y a en tout 48 telles isométries. La seule solution est alors $x = 1$ et $y = 48$. Ceci prouve simultanément deux choses : d'une part, W contient toutes les isométries de l'espace stabilisant le cube, autrement dit le groupe que l'on souhaite étudier est de Coxeter, et, d'autre part, le cône que l'on a esquissé est bien une chambre relativement à ce groupe.

D'après la théorie générale que l'on a traitée dans ce papier, le groupe W est engendré par les trois symétries s_1, s_2, s_3 par rapport aux plans respectifs $(IJKL)$, $(EGCA)$ et $(DAFG)$. Les plans $(IJKL)$ et $(EGCA)$ sont orthogonaux, ce qui prouve que le coefficient que l'on avait appelé $n_{1,2}$ vaut 2. Les plans $(IJKL)$ et $(DAFG)$ forment un angle de $\frac{\pi}{4}$ et donc $n_{1,3} = 4$. Il est un peu plus délicat de traiter le cas des deux plans $(EGCA)$ et $(DAFG)$. Un vecteur normal sortant pour le premier plan est colinéaire à :

$$\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -a^2 \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et un vecteur normal sortant pour le second est colinéaire à :

$$\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{Om} = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \\ -a^2 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par un simple calcul de produit scalaire, on trouve que l'angle entre ces deux vecteurs est $\frac{\pi}{3}$ et donc que $n_{2,3} = 3$.

Finalement la matrice du cube est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est fini !

On peut, par la même technique, déterminer la matrice de l'hypercube de dimension d . Exactement de la même façon que précédemment, on commence par calculer le cardinal de l'ensemble des isométries de l'espace laissant stable l'hypercube. Se donner une telle isométrie revient à se donner d signes et une permutation de $\{1, \dots, d\}$; et il y a $d! \cdot 2^d$ telles données.

Il faut maintenant intuitiver une chambre de l'hypercube. Mais ce n'est en fait pas compliqué. On commence par choisir une face, c'est un hypercube de dimension $d-1$. Sur cette face, on choisit une chambre¹⁹ puis on prend le cône de sommet O , le centre de l'hypercube, dirigé par cette chambre.

Calculons le volume de ce cône. On rappelle dans un premier temps qu'en dimension d , le volume d'un cône s'obtient en multipliant le volume d'une base par la hauteur puis en divisant le résultat par d . Une base est une chambre de l'hypercube de dimension $d-1$, son volume vaut donc $\frac{1}{(d-1)! \cdot 2^{d-1}}$ fois celle de l'hypercube de dimension $d-1$. Si on appelle, comme précédemment, $2a$ la longueur du côté, ce volume vaut donc :

$$\frac{(2a)^{d-1}}{(d-1)! \cdot 2^{d-1}} = \frac{a^{d-1}}{(d-1)!}$$

La hauteur du cône est a , et donc le volume de celui-ci est donné par la formule :

$$\frac{a}{d} \times \frac{a^{d-1}}{(d-1)!} = \frac{a^d}{d!}$$

ce qui est bien le volume attendu.

En faisant le même raisonnement que pour la dimension 3, on prouve à la fois que le groupe des isométries de l'hypercube est un groupe de Coxeter et que le cône que l'on a défini est une chambre (plus exactement l'intersection d'une chambre avec l'hypercube) pour ce groupe.

Plaçons-nous maintenant dans un repère d'origine O et dont les axes sont parallèles aux directions données par l'hypercube. Le cône que l'on a défini de sommet O est alors dirigé par les demi-droites $[OA_n)$, le point A_i ayant pour coordonnées :

$$A_n(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-n})$$

Un mur de la chambre est donc l'hyperplan passant par O et tous les A_n sauf un, disons A_i . Un vecteur normal à ce plan est par exemple :

$$\vec{u}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, -1, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-i-1})$$

comme on le calcule facilement. Bien sûr, lorsque $i = d$, le (-1) n'apparaît pas.

Pour calculer l'angle que font deux de ces vecteurs, on commence par remarquer que si $|i - j| \geq 2$, les vecteurs \vec{u}_i et \vec{u}_j sont orthogonaux. Il ne reste plus qu'à calculer l'angle que forment \vec{u}_i et \vec{u}_{i+1} . Or :

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_{i+1} = -1$$

pour tout i compris entre 1 et $d-1$ et $\|\vec{u}_i\| = \sqrt{2}$ pour $1 \leq i \leq d-1$ et $\|\vec{u}_d\| = 1$. Les vecteurs \vec{u}_i et \vec{u}_{i+1} font donc toujours un angle de $\frac{\pi}{3}$ sauf lorsque $i = d-1$, où l'angle est alors de $\frac{\pi}{4}$. Ces considérations donnent directement la matrice de l'hypercube ; c'est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & & & & \\ 2 & & 3 & 2 & \\ \vdots & & 3 & 4 & \\ 2 & \dots & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

¹⁹On fait donc un raisonnement par récurrence.

ce qui ne correspond certes pas directement à la matrice donnée pour le vrai cube, mais qui y correspond à une permutation près des réflexions.

Bibliographie commentée

Tout d'abord pour une introduction à la notion de groupe en général, d'espace vectoriel ou d'espace affine, on pourra se reporter à tout bon manuel de deug ou de prépa.

Dans [1], dans le chapitre IV, il est d'abord question des *Groupes de Coxeter et systèmes de Tits*, il s'agit essentiellement d'une étude des groupes de Coxeter en termes de groupes abstraits définis par générateurs et relations. Le chapitre V, et en particulier son paragraphe 3, ressemble plus à cet exposé (qui s'en inspire beaucoup) : on part d'un groupe d'isométries engendré par des réflexions et on définit une structure combinatoire : murs, chambres... Les paragraphes 4 et 5 concernent notamment l'étude d'une question ayant une réponse assez remarquable : trouver les fonctions polynomiales sur \mathbb{R}^n invariantes par l'action d'un groupe fini G agissant linéairement sur \mathbb{R}^n . Le théorème principal dit que cette algèbre de polynômes invariants est isomorphe à une algèbre de polynômes si et seulement si le groupe G est engendré par des réflexions (*i.e.* G est un groupe de Coxeter). Comme cas particulier, on a le théorème classique sur les polynômes symétriques : tout polynôme P en les variables A_1, \dots, A_n qui reste inchangé quand on permute les variables s'écrit de manière unique comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires (les polynômes symétriques élémentaires sont (au moins au signe près) les coefficients du polynôme en X suivant : $(X - A_1)(X - A_2) \cdots (X - A_n)$). Les groupes de Coxeter interviennent aussi souvent dans des problèmes de classification de certains objets mathématiques, notamment les algèbres de Lie semi-simples complexes *via* les systèmes de racines qui sont étudiés dans le chapitre VI de [1].

Les groupes de Coxeter et leur interprétation géométrique possèdent un prolongement. Si on appelle *appartement* la configuration géométrique donnée par un espace vectoriel découpé en chambres délimitées par des murs (points fixes des réflexions d'un groupe de Coxeter), on peut définir un *immeuble* comme étant un autre objet géométrique (assez compliqué) ayant la propriété d'être constitué d'appartements et de vérifier un certain nombre d'axiomes. Cependant, contrairement au cas de la vie réelle, une chambre appartient en général à plusieurs appartements... Cette théorie est développée dans le livre [2].

Les groupes de Coxeter ont aussi un lien avec la théorie des groupes de tresses. Nous avons vu que le groupe \mathcal{S}_n admettait une présentation dont les générateurs sont s_1, \dots, s_{n-1} soumis aux familles de relations suivantes :

- (1) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$;
- (2) $s_i s_j = s_j s_i$ si $j \geq i + 2$;
- (3) $s_i^2 = 1$.

Si on enlève le troisième type de relations, on obtient un nouveau groupe, c'est le groupe des tresses à n brins, dont chaque élément correspond à une certaine manière de tresser n ficelles, à déformation près. Ces groupes ont beaucoup été étudiés, notamment dans le livre [3].

Références

- [1] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique, fascicule XXXIV, groupes et algèbres de Lie*, chapitres IV, V, VI, Hermann.
- [2] Kenneth S. Brown, *Buildings*, Springer, 1989.
- [3] Joan S. Birman, *Braids, links and mapping class groups*, Annals of mathematics studies **82**, Princeton University Press, 1974.